EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 10

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $5-5\cdot(12-3\cdot 4)$ este egal cu $\ldots$.

5p **2.** Șase kilograme de mere costă 12 lei. Trei kilograme de mere de același fel costă $\ldots$ lei.

5p **3.** Suma elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x+1\leq 3\}$ este egală cu $\ldots$.

5p **4.** Rombul $ABCD$ are latura de $10\,\text{cm}$. Perimetrul acestui romb este de $\ldots\text{cm}$.

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Unghiul dreptelor BC' și DD' are măsura de $\ldots°$.

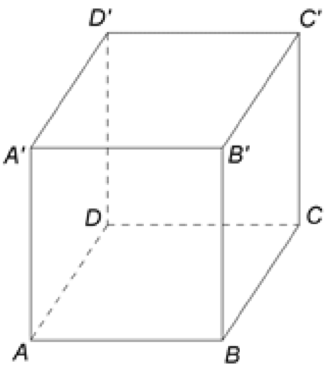
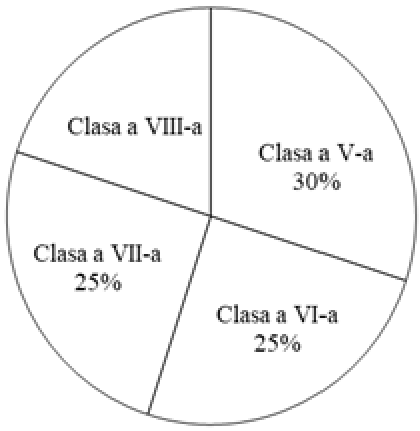


Figura 1

5p **6.** În clasele de gimnaziu ale unei școli sunt înscriși 500 de elevi. În diagrama de mai jos este prezentată repartiția procentuală, pe clase, a elevilor din această școală.



Conform informațiilor din diagramă, numărul de elevi din clasele a VIII-a este egal cu $\ldots$.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, o piramidă cu vârful V și baza triunghiul ABC.

5p **2.** Determinaţi cifrele a și b, ştiind că numărul $\overline{1ab}$ are suma cifrelor egală cu 8 și este divizibil cu 5.

5p **3.** Mihai are 34 de ani, iar fiul lui are 8 ani. Calculaţi peste câţi ani vârsta lui Mihai va fi egală cu dublul vârstei fiului său.

4. Se consideră numerele reale $x=\dfrac{6}{\sqrt{2}}-\sqrt{8}+\dfrac{10}{\sqrt{50}}$ și $y=\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{27}+2-\left|\sqrt{3}-2\right|$.

5p **a)** Arătaţi că $x=2\sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstraţi că $y^{30}+x^{50}+\left|y^{30}-x^{50}\right|=2^{76}$.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x)=3(x+1)^2+2(x+2)(x+3)-(x+5)$, unde x este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr natural n, numărul natural $E(n)$ este divizibil cu 10.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un triunghi DBC cu $BC=BD=12\text{cm}$ și $DC=12\sqrt{3}\text{cm}$. Punctul A este situat pe latura DC astfel încât $AC=8\sqrt{3}\text{cm}$.

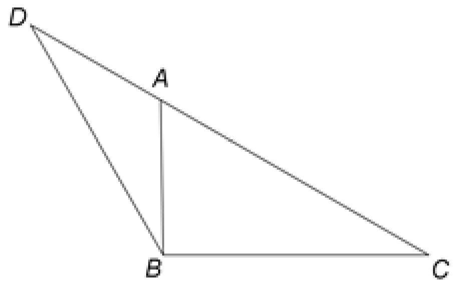


Figura 2

5p **a)** Arătați că $AD=4\sqrt{3}\text{cm}$.

5p **b)** Arătați că distanța de la punctul B la dreapta DC este egală cu 6cm.

5p **c)** Determinați măsura unghiului ABC.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu $ABCD$ pătrat, $AB=12\text{cm}$ și înălțimea $VO=8\text{cm}$, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv CV.

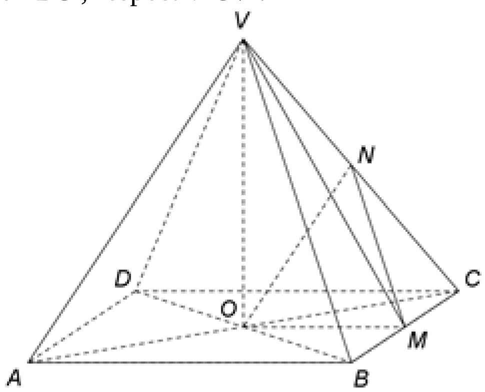


Figura 3

5p **a)** Arătați că patrulaterul $ABCD$ are aria egală cu 144cm^2.

5p **b)** Demonstrați că planele (NOM) și (VAB) sunt paralele.

5p **c)** Demonstrați că înălțimea din V a triunghiului VAM este egală cu $\frac{2\sqrt{445}}{5}\text{cm}$.

TEST 10 - REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $5-5\cdot(12-3\cdot4)=5-5\cdot(12-12)=5-5\cdot0=5-0=5.$

2) 6 kg --- 12 lei (p.d.)
3 kg --- x

$x=\dfrac{3\cdot\cancel{12}^{2}}{\cancel{6}}=6$ (lei)

Regula de trei simplă (cl. a VI-a)

sau metoda reducerii la unitate (cl. a III-a)

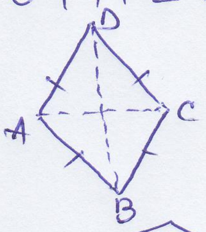
6 kg ---- 12 lei
1 kg ---- 2 lei
3 kg ---- 6 lei

$12:6=2$
$3\cdot2=6$

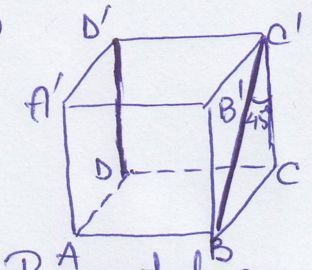
3) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x+1\le3\}=\{0;1;2\}$. Suma este $0+1+2=3$,

pentru că $x+1\le3 \iff x\le3-1 \iff x\le2,\ x\in\mathbb{N}$.

4) $P_{romb}=4\cdot l=4\cdot10=40$ (cm.)



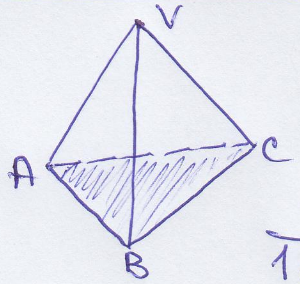
5)



BC' și DD': necoplanare,
$DD'\parallel CC'$
$\Rightarrow m(\widehat{BC';DD'})=m(\widehat{BC';CC'})=$
$=m(\widehat{BC'C})=45°.$

6) Procentul numărului de elevi din clasele a VIII-a este $100\%-(30\%+25\%+25\%)=100\%-80\%=20\%$. $(20\%\text{ din }500)=\dfrac{20}{1\cancel{00}}\cdot5\cancel{00}=100.$ (elevi)

SUBIECTUL al II-lea: 1)



2) $\overline{1ab}$ are suma cifrelor egală cu 8 $\Rightarrow 1+a+b=8\Rightarrow$
$\Rightarrow a+b=7.$

$\overline{1ab}\,\vdots\,5\Rightarrow b\in\{0;5\}$ și

avem două cazuri: I: $b=0\Rightarrow a+0=7\Rightarrow a=7$ și este vorba de nr. 170. II: $b=5\Rightarrow a+5=7\Rightarrow a=2$ și este vorba de nr. 125.

R: Problema are două soluții $\begin{cases}a=7\\b=0\end{cases}$, respectiv $\begin{cases}a=2\\b=5\end{cases}$.

3) Notăm cu x nr. anilor ceruți în problemă și avem:

$34+x=2\cdot(8+x)\iff34+x=16+2x\iff34-16=2x-x\iff$
$\iff x=18.$ R: Peste 18 ani vârsta lui Mihai va fi egală cu dublul vârstei fiului său.

4.) a) $x=\dfrac{6}{\sqrt2}-\sqrt8+\dfrac{10}{\sqrt{50}}={}^{\sqrt2)}\dfrac{6}{\sqrt2}-2\sqrt2+{}^{\sqrt2)}\dfrac{10}{5\sqrt2}=$

$\sqrt8=\sqrt{4\cdot2}=2\sqrt2$
$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot2}=5\sqrt2$

$=\dfrac{\cancel{6}^{3}\sqrt2}{\cancel{2}}-2\sqrt2+\dfrac{\cancel{10}^{1}\sqrt2}{\cancel{10}}=3\sqrt2-2\sqrt2+\sqrt2=2\sqrt2$, deci $x=2\sqrt2$, q.e.d.

b) $y=\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{27}+2-|\sqrt3-2|=4\sqrt3-5\sqrt3+3\sqrt3+2-$
$-(2-\sqrt3)=2\sqrt3+\cancel{2}-\cancel{2}+\sqrt3=3\sqrt3$

$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot3}=4\sqrt3$
$\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot3}=5\sqrt3$
$\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot3}=3\sqrt3$
$|\underbrace{\sqrt3-2}_{<0}|=2-\sqrt3$

Deci $y=3\sqrt3$.

$y^{30}+x^{50}+|\underbrace{y^{30}-x^{50}}_{<0}|$

Pentru a calcula modulul trebuie să comparăm y^{30} și x^{50}.

Avem $y^{30} \boxed{<} x^{50} \Leftrightarrow (3\sqrt{3})^{30} \boxed{<} (2\sqrt{2})^{50} \Leftrightarrow [(3\sqrt{3})^2]^{15} \boxed{<} [(2\sqrt{2})^2]^{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27^{15} \boxed{<} 8^{25} \Leftrightarrow (3^3)^{15} \boxed{<} (2^3)^{25} \Leftrightarrow 3^{45} \boxed{<} 2^{75} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^3)^{15} \boxed{<} (2^5)^{15} \Leftrightarrow 27^{15} < 32^{15}$

$\left\{ \begin{array}{l} 45=3\cdot 15 \\ 75=5\cdot 15 \end{array} \right.$

Atunci $y^{30}-x^{50}<0$ și $|y^{30}-x^{50}| = -(y^{30}-x^{50}) = x^{50}-y^{30}$.

Avem $y^{30}+x^{50}+|y^{30}-x^{50}| = \cancel{y^{30}}+x^{50}+x^{50}-\cancel{y^{30}} = 2\cdot x^{50} =$

$= 2\cdot(2\sqrt{2})^{50} = 2\cdot 2^{50}\cdot(\sqrt{2})^{50} = 2\cdot 2^{50}\cdot 2^{25} = 2^{76}$

$\left\{ (\sqrt{2})^{50} = \sqrt{2^{50}} = 2^{25} \right.$

q.e.d.

5) $E(x) = 3(x+1)^2 + 2(x+2)(x+3) - (x+5)$, $x \in \mathbb{R}$.

$E(x) = 3(x^2+2x+1) + 2(x^2+5x+6) -$
$- (x+5) =$
$= 3x^2+6x+3+2x^2+10x+12-x-5 =$
$= 5x^2+15x+10 = 5(x^2+3x+2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$\left| \begin{array}{l} (x+1)^2 = x^2+2x+1 \\ (x+2)(x+3) = x^2+3x+2x+6 = \\ = x^2+5x+6 \end{array} \right.$

Deci $E(n) = 5(n^2+3n+2)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $E(n) \vdots 5$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. (1)

Dar $n^2+3n+2 = n^2+n+2n+2 = n(n+1)+2(n+1) =$
$= (n+1)(n+2)$.

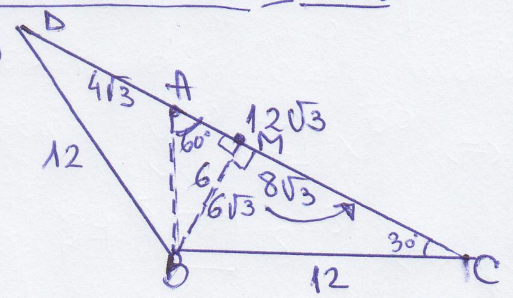
Atunci $(n+1)\cdot(n+2) \vdots 2$ (produsul a două nr. naturale consecutive este un nr. par)

Deci $E(n) = 5(n+1)(n+2)$ este $\vdots 2$ (2)

Din afirmațiile (1) și (2) și faptul că 2 și 5 sunt prime între ele rezultă că $E(n) \vdots (2\cdot 5)$, adică $E(n) \vdots 10$, q.e.d.

SUBIECTUL al III-lea:

1.)



a) $AD = DC - AC = 12\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (cm), q.e.d.

b) ΔBCD: isoscel, $BC = BD = 12$ cm.
Distanța de la un punct la o dreaptă este egală cu lungimea perpendicularei din punct pe dreaptă.

Ducem $BM \perp CD$, deci $d(B; CD) = BM$.

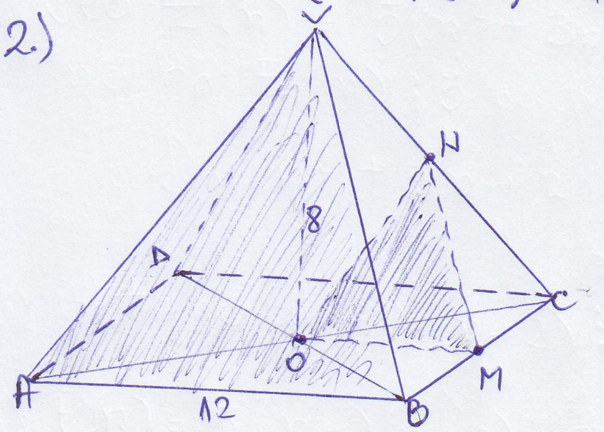
$\left.\begin{array}{l}\Delta BCD: \text{isoscel} \\ BM: \text{înălțime}\end{array}\right| \Rightarrow BM$: mediană, deci

$CM = MD = \frac{CD}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (cm.)

Cu T.P. în ΔMBC dreptunghic în M avem:
$BM^2 = BC^2 - MC^2 = 12^2 - (6\sqrt{3})^2 = 144 - 108 = 36$, deci $BM = \sqrt{36} = 6$ (cm) q.e.d.

c) În ΔMBC dreptunghic avem $\sin \hat{C} = \frac{BM}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\hat{C}) = 30°$.
$AC = 8\sqrt{3}$ cm; $CM = 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AM = AC - CM = 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (cm)
În ΔMAB dreptunghic în M avem:
$tg\, \widehat{BAM} = \frac{BM}{AM} = \frac{\overset{\sqrt{3}}{\cancel{6}}}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow m(\widehat{BAM}) = 60°$.
În ΔBAC avem $m(\widehat{BAC}) = 60°$, $m(\widehat{BCA}) = 30° \Rightarrow m(\widehat{ABC}) =$
$= 180° - (60° + 30°) = 180° - 90° = 90°$.

2.)



a) ABCD: pătrat, $AB = 12$ cm
$\mathcal{A}_{ABCD} = a^2 = AB^2 = 12^2 = 12 \cdot 12 = 144$ (cm²).

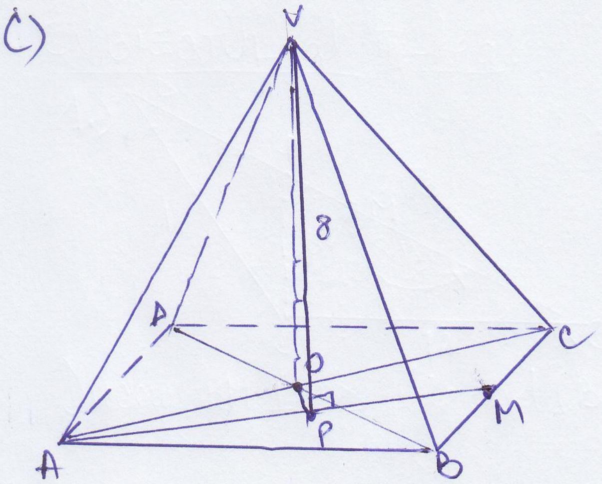
b) Două plane sunt paralele dacă unul din ele conține două drepte concurente paralele cu celălalt plan. ①
O dreaptă exterioară unui plan este paralelă cu planul dacă este paralelă cu o dreaptă din plan.

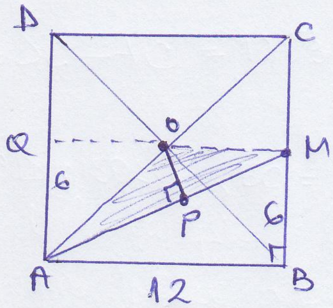
În cazul nostru avem: OM linie mijlocie în $\Delta CAB \Rightarrow OM \parallel AB$, $AB \subset (VAB)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow OM \parallel (VAB)$, una din dreptele concurente necesare în ①
$\left.\begin{array}{l}MN: \text{linie mijlocie în } \Delta CVB \Rightarrow MN \parallel VB \\ VB \subset (VAB)\end{array}\right| \Rightarrow MN \parallel (VAB)$, cealaltă dreaptă necesară în ①. Avem deci

$\left.\begin{array}{l}OM \parallel (VAB) \\ MN \parallel (VAB) \\ OM; MN \text{ concurente}\end{array}\right\} \Rightarrow (NOM) \parallel (VAB)$ q.ed.

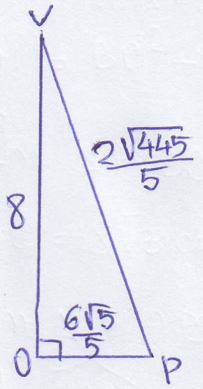
$OM \subset (NOM); MN \subset (NOM)$

c)





$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABC) \\ \text{Ducem } OP \perp AM \end{array}\right\} \overset{T.3\perp}{\Longrightarrow} VP \perp AM$, deci VP este înălțimea ΔVAM dusă din vârful V.



$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABC) \\ OP \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow VO \perp OP \Rightarrow \Delta VOP$: dreptunghic în O.

Mai întâi vom calcula OP în ΔOAM.

Fie Q mijlocul lui [AD]. $BM = AQ = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (cm), $OM = 6$ cm

În orice triunghi produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei este constant, deci în ΔAOM avem: $\boxed{OM \cdot AQ = MA \cdot OP}$ (3)

Trebuie să aflăm AM cu T.P. în ΔABM:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180 \Rightarrow AM = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ (cm)

În relația (3) avem: $6 \cdot 6 = 6\sqrt{5} \cdot OP \Rightarrow OP = \frac{36}{6\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ (cm)

Cu T.Pitagora în ΔVOP avem:

$$VP^2 = VO^2 + OP^2 = 8^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 64 + \frac{180}{25} =$$

$$= \frac{1600 + 180}{25} = \frac{1780}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow VP = \sqrt{\frac{1780}{25}} = \frac{2\sqrt{5 \cdot 89}}{5} = \frac{2\sqrt{445}}{5} \text{ (cm)}$$

q.e.d

$64 \cdot 25$: 320, 128, 1600

1780	2·5
178	2
89	89
1	

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	5	**5p**
2.	6	**5p**
3.	3	**5p**
4.	40	**5p**
5.	45	**5p**
6.	100	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează piramida cu baza triunghi	**4p**
	Notează piramida cu vârful V şi baza triunghiul ABC	**1p**
2.	$1+a+b=8$	**2p**
	$\overline{1ab} \vdots 5 \Leftrightarrow b \vdots 5$ şi, cum $a+b=7$, obţinem $a=7$, $b=0$ sau $a=2$, $b=5$	**3p**
3.	Peste n ani, Mihai va avea $34+n$ ani şi fiul său va avea $8+n$ ani	**2p**
	$34+n=2(8+n) \Leftrightarrow 34+n=16+2n$, deci, peste $n=18$ ani, vârsta lui Mihai va fi egală cu dublul vârstei fiului său	**3p**
4.	**a)** $x=\frac{6\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}+\frac{10\sqrt{2}}{10}=$	**3p**
	$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$	**2p**
	b) $y=4\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2-2+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$	**2p**
	$x^{50}=2^{75}$, $y^{30}=3^{45}$ şi, cum $2^{75}=\left(2^5\right)^{15}>\left(3^3\right)^{15}=3^{45}$, obţinem $\left\|y^{30}-x^{50}\right\|=x^{50}-y^{30}$, deci $y^{30}+x^{50}+\left\|y^{30}-x^{50}\right\|=y^{30}+x^{50}+x^{50}-y^{30}=2x^{50}=2\cdot 2^{75}=2^{76}$	**3p**
5.	$E(x)=3\left(x^2+2x+1\right)+2\left(x^2+2x+3x+6\right)-x-5=5x^2+15x+10=5\left(x^2+3x+2\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
	Pentru orice număr natural n, $E(n)=5(n+1)(n+2)$ şi numărul $(n+1)(n+2)$ este divizibil cu 2, deci numărul natural $E(n)$ este divizibil cu 10	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $AD=DC-AC=$	**3p**
	$=12\sqrt{3}-8\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ cm	**2p**
	b) Construim $BM\perp DC$, $M\in DC$, deci $d(B,DC)=BM$ şi, cum $BD=BC$, obţinem că M este mijlocul lui DC, deci $CM=\frac{DC}{2}=6\sqrt{3}$ cm	**3p**
	ΔBMC este dreptunghic în $M \Rightarrow BM^2+MC^2=BC^2$, deci $BM=\sqrt{12^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=6$cm	**2p**

	c) $AM = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $BM = 6\,\text{cm}$, deci $AB = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$	**2p**
	$AB^2 + BC^2 = AC^2$, deci ΔABC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle ABC) = 90°$	**3p**
2.	**a)** $ABCD$ este pătrat, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 =$	**3p**
	$= 12^2 = 144\,\text{cm}^2$	**2p**
	b) MN este linie mijlocie în ΔVBC şi OM este linie mijlocie în ΔABC	**2p**
	$MN \parallel BV$, $OM \parallel AB$, $MN \cap OM = \{M\}$ şi $BV \cap AB = \{B\}$, deci $(NOM) \parallel (VAB)$	**3p**
	c) $VO \perp (ABC)$ şi $AM \subset (ABC)$, deci, pentru $OP \perp AM$, $P \in AM$, obţinem $VP \perp AM$, deci VP este înălţimea din V a triunghiului VAM	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AOM} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta ACM} = 18\,\text{cm}^2$, $AM = 6\sqrt{5}\,\text{cm}$, deci $OP = \frac{6\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}$	**2p**
	ΔVOP este dreptunghic, deci $VP = \sqrt{VO^2 + OP^2} = \frac{2\sqrt{445}}{5}\,\text{cm}$	**1p**