

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENTII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 13

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

5p 1. Rezultatul calculului $(2+3)\cdot 10 - 10 : 5$ este egal cu

5p 2. Dacă $\frac{x+2}{12} = \frac{7}{6}$, atunci x este egal cu

5p 3. Cel mai mare număr natural care aparține intervalului $[-1, 7)$ este

5p 4. Pătratul $ABCD$ are latura de 5 cm. Diagonala acestui pătrat are lungimea egală cu ... cm.

5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Unghiul dreptelor AB și DG are măsura de ... °.

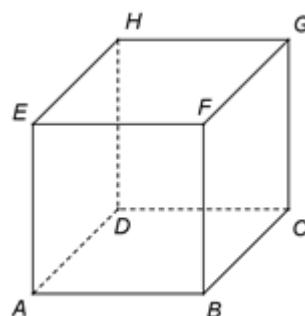
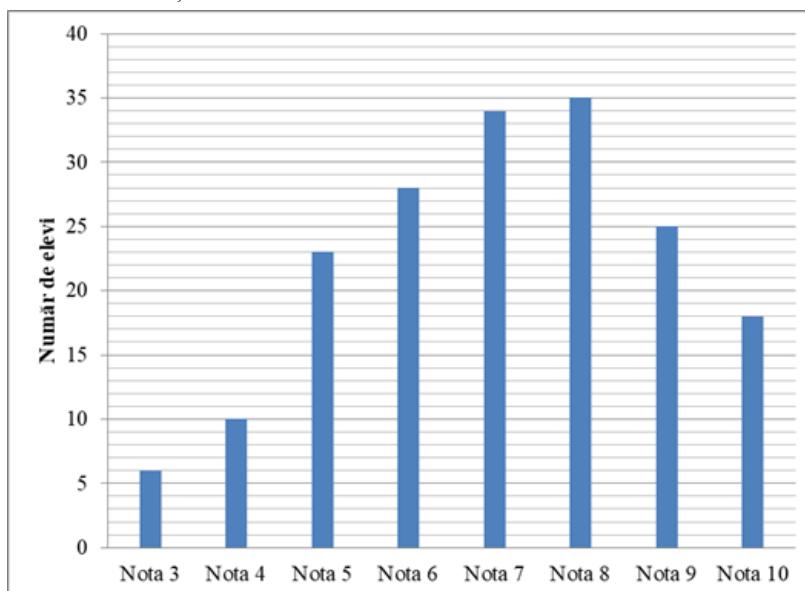


Figura 1

5p 6. În diagrama de mai jos este prezentată repartitia notelor obținute la un test inițial la matematică, de elevii claselor a VIII-a dintr-o școală.



Conform informațiilor din diagramă, numărul elevilor care au obținut nota 8 este mai mare decât numărul elevilor care au obținut nota 4 cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

5p 2. Determinați numerele prime a , b și c , știind că $a < b < c$ și $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 154$.

5p 3. Prețul unui obiect este 360 de lei. După o ieftinire cu $p\%$ din prețul obiectului, urmată de o nouă ieftinire cu 25%, noul preț va fi 243 de lei. Determinați numărul p .

- 4.** Se consideră numerele reale $x = 2\sqrt{3}(\sqrt{75} - 2\sqrt{108} + \sqrt{243})$ și $y = \left(\frac{2}{5\sqrt{7}} + \frac{5}{2\sqrt{7}}\right) \cdot \sqrt{700} - \sqrt{(-2)^2}$.
- 5p** a) Arătați că $x = 12$.
- 5p** b) Calculați diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor x și y .
- 5p** 5. Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 + x(x-15) - 4(x-1)^2 + 1$, unde x este număr real. Calculați $N = a^2 + b^2$, unde a și b , cu $a < b$, sunt numerele reale pentru care $E(x) = (x+a)(x+b)$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un romb $ABCD$ cu $AB = 18$ cm și $m(\angle ABC) = 60^\circ$.

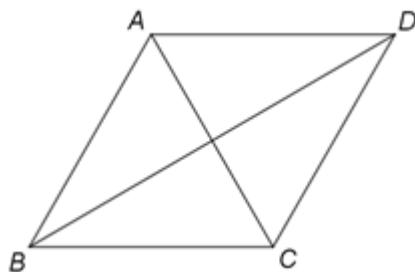


Figura 2

- 5p** a) Arătați că perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu 72 cm.
- 5p** b) Arătați că lungimea diagonalei BD este egală cu $18\sqrt{3}$ cm.
- 5p** c) Pe laturile AB , BC , CD și DA ale rombului $ABCD$ se consideră punctele M , N , P , respectiv Q , astfel încât $MN \parallel AC$ și $MNPQ$ este patrat. Demonstrați că $(\sqrt{3}+1)MN = BD$.
2. În Figura 3 este reprezentat un triunghi dreptunghic ABC cu $AB \perp AC$, $AB = 4\sqrt{10}$ cm, $AC = 12\sqrt{10}$ cm și $PA \perp (ABC)$, $PA = 12$ cm. Punctul D este proiecția punctului A pe dreapta BC .

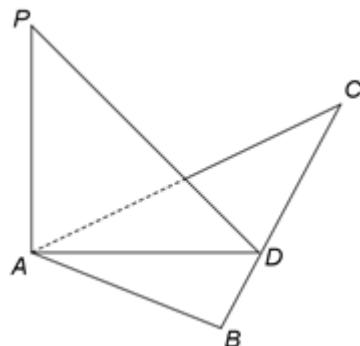


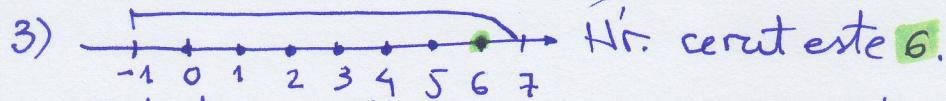
Figura 3

- 5p** a) Arătați că $BC = 40$ cm.
- 5p** b) Determinați măsura unghiului dintre dreapta PD și planul (ABC) .
- 5p** c) Demonstrați că numărul care reprezintă distanța, măsurată în centimetri, de la punctul A la planul (PBC) aparține mulțimii $I = (8,46; 8,52)$. Se presupune cunoscut faptul că $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

TESTUL 13: (REZOLVARE)

SUBIECTUL I: 1) $(2+3) \cdot 10 - 10 : 5 = 5 \cdot 10 - 2 = 50 - 2 = 48$;

2) $\frac{x+2}{12} = \frac{7}{6} \Rightarrow x+2 = \frac{12 \cdot 7}{6} \Leftrightarrow x+2 = 14 \Leftrightarrow x = 14 - 2 \Leftrightarrow x = 12$;

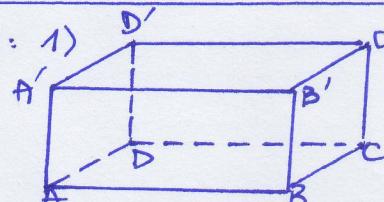


4) Patratul cu latura de 5cm are diagonala egală cu $5\sqrt{2}$ cm.

5)
 $m[\overline{AB}; \overline{DG}] = m(\overline{CD}; \overline{DG}) = m(\overline{CDG}) = 45^\circ$.

6) Numărul elevilor cu nota 8 este 35, iar numărul elevilor cu nota 4 este 10.
 $35 - 10 = 25$. R: Nr. elevilor cu nota 8 este cu 25 mai mare decât nr. elevilor cu nota 4.

SUBIECTUL al II-lea: 1)



2) $a, b, c \in \mathbb{N}$, a, b, c : prime,
 $a < b < c$
 $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 154$.

$\Rightarrow a, b, c$ sunt cifre ale sistemului de numerație zecimal: 0; 1; ...; 9.
 Cifre care reprezintă numere prime sunt: 2; 3; 5 și 7.

Verificăm pe rând cele trei posibilități: I: $2 < 3 < 5$; II: $2 < 5 < 7$ și
 III: $3 < 5 < 7$. Avem I: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases} 23 + 35 + 52 = 110 \neq 154$

II: $\begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=7 \end{cases}$

$25 + 57 + 72 = 154 \checkmark$

III: $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=7 \end{cases}$

$35 + 57 + 73 = 165 \neq 154$.

R: $a = 2; b = 5; c = 7$ sunt numerele cerute.

metoda a ≈ a: $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 154 \Leftrightarrow \underline{10a+b} + \underline{10b+c} + \underline{10c+a} = 154 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 11a + 11b + 11c = 154 \Leftrightarrow 11(a+b+c) = 154 \Leftrightarrow a+b+c = 154 : 11 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a+b+c = 14$. Dacă $a=2 \Rightarrow b+c = 14-2=12$
 b, c cifre nr. prime $\Rightarrow b=5, c=7$

Dacă $a=3 \Rightarrow b+c = 11$ imposibil (impar+impar = par)

Alte posibilități nu mai avem, deci rămâne $a=2; b=5; c=7$.

3) După prima ieftinire, cu $p\%$, pretul va fi $(100-p)\%$ din 360.

După a doua ieftinire, cu 25% , pretul va fi 75% din $(100-p)\% \cdot 360$.

Aveam ecuația $\frac{45}{100} \cdot \left[\frac{100-p}{100} \cdot 360 \right] = 243 \Leftrightarrow \frac{\frac{45(100-p)}{100} \cdot 360}{1000} = 243 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{27(100-p)}{100} = 243 \Leftrightarrow 27(100-p) = 2430 \Leftrightarrow 100-p = \frac{2430}{27} = 90$

$= \frac{2430}{27} = \frac{810}{9} = 90 \Leftrightarrow p = 100-90 = 10$. R: $p=10$.

[Obs.: În barem e „mercul invers” în 2 etape.]

$$\begin{aligned}
 4.) a) x &= 2\sqrt{3}(5\sqrt{3} - 2\cdot 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3}) = \\
 &= 2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 9\sqrt{3} = \\
 &= 10 \cdot 3 - 24 \cdot 3 + 18 \cdot 3 = 3(10 - 24 + 18) = \\
 &= 3 \cdot 4 = 12. \text{ Deci } x = 12, \text{ g.e.d.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) y &= \left(\frac{2}{5\sqrt{7}} + \frac{5}{2\sqrt{7}} \right) \cdot 10\sqrt{7} - 2 = \\
 &= \frac{2}{5\sqrt{7}} \cdot 10\sqrt{7} + \frac{5}{2\sqrt{7}} \cdot 10\sqrt{7} - 2 = \\
 &= 4 + 25 - 2 = 27.
 \end{aligned}$$

$$m_a(x; y) = \frac{x+y}{2} = \frac{12+27}{2} = \frac{39}{2} = 19,5$$

$$m_g(x; y) = \sqrt{xy} = \sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$$

$$\text{Deci } m_a(x; y) - m_g(x; y) = 19,5 - 18 = 1,5.$$

$$5) E(x) = (2x+3)^2 + x(x-15) - 4(x-1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
 E(x) &= 4x^2 + 12x + 9 + x^2 - 15x - \\
 &\quad - 4(x^2 - 2x + 1) + 1 = \\
 &= \cancel{4x^2} + \cancel{12x} + \cancel{9} + x^2 - \cancel{15x} - \cancel{4x^2} + \cancel{8x} - \cancel{4} + \cancel{1} = \\
 &= x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x+2) + 3(x+2) = \\
 &= (x+2)(x+3)
 \end{aligned}$$

$$E(x) = (x+a)(x+b) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

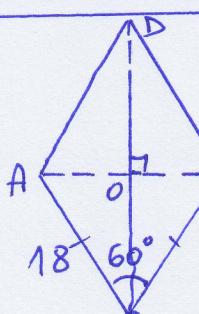
Dar $a < b \Rightarrow$ rămanăne $a=2$ și $b=3$.

$$N = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Deci $N = 13$.

SUBIECTUL al III-lea:

1)



a) ABCD: romb \Rightarrow
 $\Rightarrow AB = BC = CD = DA = 18 \text{ cm.}$

$$P_{ABCD} = 4 \cdot a = 4 \cdot 18 = 72 \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$$

b) $AB = BC \Rightarrow \triangle BAC$: isoscel
 $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle BAC$: equilateral.

Intr-un romb diagonale sunt perpendiculare și se înțelegă reciproc. Notăm cu O intersecția diagonalelor.
 $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ (cm)}.$ $BD = 2 \cdot BO = 2 \cdot 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$

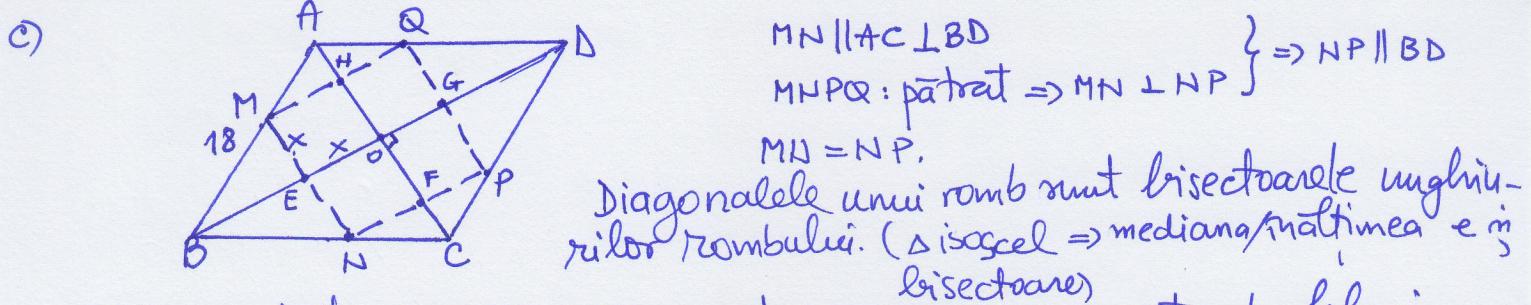
$$\begin{array}{rcl}
 \sqrt{75} &=& \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \\
 \sqrt{108} &=& \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3} \\
 \sqrt{243} &=& \sqrt{81 \cdot 3} = 9\sqrt{3} \\
 \text{sau} & & \\
 108 &|& 2 > 2 & 243 &|& 3 > 3 \\
 54 &|& 2 & 81 &|& 3 \\
 27 &|& 3 > 3 & 27 &|& 3 > 3 \\
 9 &|& 3 & 9 &|& 3 \\
 3 &|& 3 & 3 &|& 3 \\
 1 && & 1 && 1
 \end{array}$$

$$\sqrt{700} = \sqrt{100 \cdot 7} = 10\sqrt{7}.$$

$$\sqrt{-21}^2 = |-21| = 2$$

Obs: Putem descompune cu formula $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$\begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=6 \end{cases}$	$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$	
$x_1 = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$	
$x_2 = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$	
$a(x-x_1)(x-x_2) = 1(x-(-3))(x-(-2)) = (x+3)(x+2).$	



Este evident că $\triangle BMN, \triangle DNP$ sunt isoscele congruente, la fel și $\triangle AMQ, \triangle CNP$. Deci $MN \perp BD, MQ \perp AC$ și, notând cu E, F, G , respectiv punctele de intersecție ale diagonalelor rombului $ABCD$ cu laturile pătratului $MNPQ$, ca în figura, aceste puncte (cum și E, F, G) sunt mijlociile laturilor pătratului $MNPQ$.

Notăm $ME = x; MN = 2x$.

Evident că $ME = MH = EO$, ofind punctul de intersecție al diagonalelor rombului.

$$\triangle BME \sim \triangle BAO \text{ (T.f.N)} \Rightarrow \frac{ME}{AO} = \frac{BE}{BO}. \text{ Dar } AO = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ (cm)}, \text{ iar}$$

(ABAC: echipilateral)

$$BO = 9\sqrt{3} \text{ cm}.$$

$$\text{Avem } \frac{x}{9} = \frac{9\sqrt{3} - x}{9\sqrt{3}} \Rightarrow 9\sqrt{3}x = 9(9\sqrt{3} - x) \Leftrightarrow 9\sqrt{3}x = 81\sqrt{3} - 9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{3}x + 9x = 81\sqrt{3} \Leftrightarrow 9x(\sqrt{3} + 1) = 81\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{81\sqrt{3}}{9(\sqrt{3} + 1)} \Leftrightarrow$$

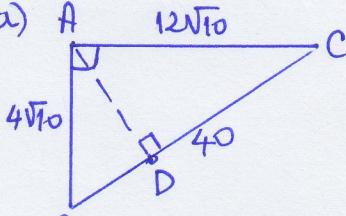
$$\Leftrightarrow x = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow ME = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \text{ (cm). Atunci } MN = 2 \cdot ME = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \text{ cm.}$$

$$BD = 2 \cdot BO = 2 \cdot 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow \underline{MN(\sqrt{3} + 1)} = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot (\sqrt{3} + 1) = 18\sqrt{3} = \underline{BD}, \text{ deci } (\sqrt{3} + 1)MN = BD, \text{ q.e.d.}$$

[OBS. Această rezolvare mi se pare mai simplă.]

2) a)

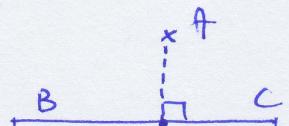


T. Pitagora:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = (4\sqrt{10})^2 + (12\sqrt{10})^2 = 16 \cdot 10 + 144 \cdot 10 = 160 + 1440 = 1600$$

$$BC = \sqrt{1600} = 40 \text{ (cm.)}$$



Proiecția unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei desă din punct pe

Deci $AD \perp BC$ (AD este mătăinea $\triangle ABC$ dreptunghiulică)

Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan este egală cu măsura unghiului dintre dreaptă și proiecția ei pe plan.

$PA \perp (ABC) \Rightarrow$ Proiecția dreptei PD pe planul (ABC) este AD .

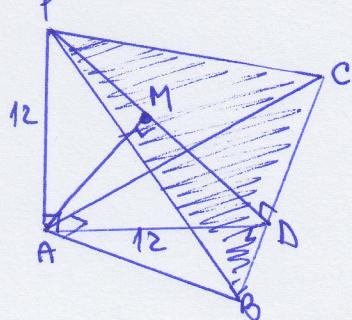
Deci $m[\overrightarrow{PD}; \overrightarrow{(ABC)}] = m[\overrightarrow{PD}; \overrightarrow{AD}] = m[\overrightarrow{ADP}]$.

Cu a.ii-a T.T. în $\triangle ABC$ avem $AD \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AD \cdot 40 = 4\sqrt{10} \cdot 12\sqrt{10} \Rightarrow AD = \frac{4 \cdot 12 \cdot 10}{40}$ deci $AD = 12$ cm. $\triangle PAD$: dreptunghiulic (O dr. \perp pe plan și \perp pe o rîcă dr. din pl.).

$AP = AD = 12$ cm $\Rightarrow \triangle PAD$: dreptunghiulic isoscel, deci $m[\overrightarrow{ADP}] = 45^\circ$.

R: $m[\overrightarrow{PD}; \overrightarrow{(ABC)}] = 45^\circ$.

c)



Distanța de la un punct la un plan este egală cu lungimea perpendicularei duse din punct pe plan.

Aveam mai întâi $PA \perp (ABC) \quad | \Rightarrow PD \perp BC$ (T. 31)

Ducem $AM \perp PD$
 Aveam $AD \perp BC \quad | \Rightarrow AM \perp (PBC)$ (R.2 a T.31)

Deci $d[A; (PBC)] = AM$.

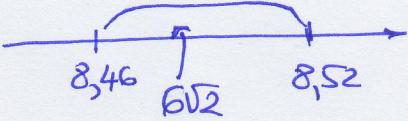
Dar $\triangle PAD$: dr. isoscel $\Rightarrow AM$ este mijlociană, deci $AM = \frac{PD}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm

Evident că $PD = 12\sqrt{2}$ cm (ipotenuza dr. isoscel cu catete egale cu a este $a\sqrt{2}$)

Aveam de arătat că $6\sqrt{2} \in I = (8,46; 8,52)$.

Aveam $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ (A) $| \cdot 6 \Leftrightarrow$

$(\Rightarrow 6 \cdot 1,41 < 6\sqrt{2} < 6 \cdot 1,42 \Leftrightarrow \underline{8,46 < 6\sqrt{2} < 8,52}$, deci



$AM = 6\sqrt{2} \in I = (8,46; 8,52)$, g.e.d.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	48	5p
2.	12	5p
3.	6	5p
4.	$5\sqrt{2}$	5p
5.	45	5p
6.	25	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$	4p 1p
2.	$11(a+b+c) = 154$, deci $a+b+c = 14$, care este număr par, deci nu toate numerele a , b și c sunt impare Cum $a < b < c$ și numerele a , b și c sunt prime, obținem că $a = 2$, $b = 5$ și $c = 7$	2p 3p
3.	$x - \frac{25}{100} \cdot x = 243$, unde x este prețul obiectului după ieftinirea cu $p\%$, deci $x = 324$ $360 - \frac{p}{100} \cdot 360 = 324 \Rightarrow \frac{p}{100} \cdot 360 = 36$, deci $p = 10$	2p 3p
4.	a) $x = 2\sqrt{3}(5\sqrt{3} - 2\cdot 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12$ b) $y = \frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 5}{10\sqrt{7}} \cdot 10\sqrt{7} - -2 = 29 - 2 = 27$ $m_a = \frac{x+y}{2} = \frac{12+27}{2} = 19,5$ și $m_g = \sqrt{xy} = \sqrt{12 \cdot 27} = 18$, deci diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor x și y este egală cu $m_a - m_g = 19,5 - 18 = 1,5$	3p 2p 2p 3p
5.	$E(x) = 4x^2 + 12x + 9 + x^2 - 15x - 4(x^2 - 2x + 1) + 1 = 5x^2 - 3x + 9 - 4x^2 + 8x - 4 + 1 = x^2 + 5x + 6$, pentru orice număr real x $E(x) = (x+2)(x+3)$, pentru orice număr real $x \Rightarrow a = 2$ și $b = 3$, deci $N = 13$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $P_{ABCD} = 4AB = 4 \cdot 18 = 72$ cm	3p 2p
	b) $ABCD$ romb $\Rightarrow BO \perp AC$, unde $AC \cap BD = \{O\}$, deci BO este înălțime în triunghiul echilateral ABC , deci $BO = 9\sqrt{3}$ cm O este mijlocul segmentului $BD \Rightarrow BD = 2BO = 18\sqrt{3}$ cm	3p 2p

	c) $MN \parallel AC \Rightarrow \Delta BMN \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA}$ și, cum $MNPQ$ patrat și $AC \perp BD$, obținem $MQ \parallel BD$, deci $\Delta AMQ \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{MQ}{BD} = \frac{AM}{AB}$, de unde obținem $\frac{MN}{AC} + \frac{MQ}{BD} = \frac{AM}{AB} + \frac{BM}{BA} = 1$ $\frac{MN}{18} + \frac{MN}{18\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{3} + 1)MN = 18\sqrt{3}$ cm, deci $(\sqrt{3} + 1)MN = BD$	3p 2p
2.	a) ΔABC este dreptunghic în A , deci $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (4\sqrt{10})^2 + (12\sqrt{10})^2$ $BC = \sqrt{160 + 1440} = \sqrt{1600} = 40$ cm	2p 3p
	b) $PA \perp (ABC) \Rightarrow \sphericalangle(PD, (ABC)) = \sphericalangle(PD, AD) = \sphericalangle PDA$ ΔABC este dreptunghic în A și $AD \perp BC \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{4\sqrt{10} \cdot 12\sqrt{10}}{40} = 12$ cm și, cum $PA = 12$ cm și $PA \perp AD$, obținem că ΔPAD este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle PDA) = 45^\circ$	2p 3p
	c) $BC \perp PA$, $BC \perp AD$ și $PA \cap AD = \{A\} \Rightarrow BC \perp (PAD)$ și, cum $AM \subset (PAD)$, unde $M \in PD$ astfel încât $AM \perp PD$, obținem $BC \perp AM$ $AM \perp BC$, $AM \perp PD$ și $BC \cap PD = \{D\} \Rightarrow AM \perp (PBC)$, deci $d(A, (PBC)) = AM$ ΔPAD este dreptunghic isoscel cu $PA = 12$ cm, deci $AM = 6\sqrt{2}$ cm și, cum $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, obținem $8,46 < AM < 8,52$, deci distanța, măsurată în centimetri, de la punctul A la planul (PBC) aparține mulțimii $I = (8,46; 8,52)$	2p 1p 2p