EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 15

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $35-35:(2+5)$ este egal cu $\dots$.

5p **2.** Numărul care reprezintă un sfert din 20 este egal cu $\dots$.

5p **3.** Cel mai mare număr natural, care este multiplu de 20, din mulțimea $A=\{10,20,30,\dots,90\}$ este $\dots$.

5p **4.** Un cerc are lungimea egală cu 12π cm. Diametrul acestui cerc este egal cu $\dots$ cm.

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=5$ cm. Lungimea segmentului BB' este egală cu $\dots$ cm.

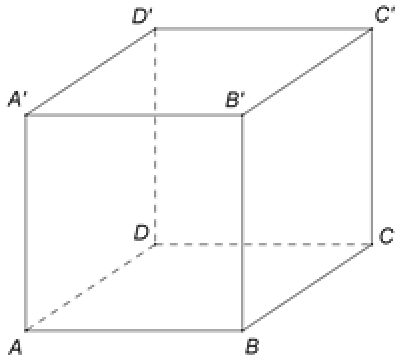


Figura 1

5p **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiţia elevilor unei clase a VIII-a, în funcție de mediile obținute la matematică, pe semestrul I.

Media	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	4	5	7	6	5	2

Conform informațiilor din tabel, numărul elevilor din această clasă care au obținut la matematică, pe semestrul I, cel puțin media 9 este egal cu $\dots$.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un tetraedru $ABCD$.

5p **2.** Determinați numărul natural a, știind că restul împărțirii numărului $\overline{33a}$ la un număr natural de o cifră este egal cu 8.

5p **3.** Media aritmetică a două numere naturale este egală cu 12. Determinaţi cele două numere, ştiind că unul dintre numere este de trei ori mai mare decât celălalt.

4. Se consideră numerele reale $x=7\sqrt{24}-3\sqrt{3}\left(8\sqrt{3}-2\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\right)$ și $y=\left(\frac{7}{6\sqrt{2}}-\frac{5}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\right):\frac{1}{\sqrt{288}}$.

5p **a)** Arătați că $x=2\sqrt{6}$.

5p **b)** Demonstrați că $\left|x-y\sqrt{3}\right|=-x+y\sqrt{3}$.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x)=(2x-1)^2-3(x-2)(x+1)+(x+1)^2-x-8$, unde x este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, media geometrică a numerelor $E(a)$ și $E\left(\frac{1}{a}\right)$ este număr natural.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. În *Figura 2* este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB = 12$ cm și punctul D este situat pe dreapta BC astfel încât $BC = 2BD$ și $B \in (CD)$. Semidreapta BM, $M \in AD$, este bisectoarea unghiului ABD și N este punctul de intersecție dintre AB și paralela prin M la BC.

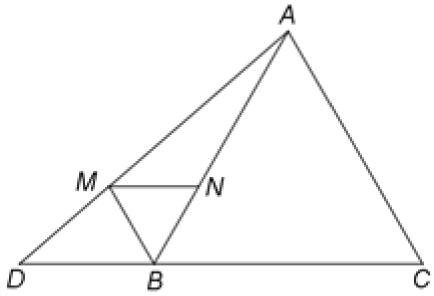


Figura 2

5p **a)** Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

5p **b)** Demonstrați că triunghiurile BMN și ABC sunt asemenea.

5p **c)** Arătați că distanța de la B la AD este egală cu $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}\,\text{cm}$.

2. În *Figura 3* este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB = 10$ cm și dreptele AM, BN și CP, perpendiculare pe planul (ABC), astfel încât $AM = 10\sqrt{3}$ cm, $BN = 5\sqrt{3}$ cm și $CP = 5\sqrt{3}$ cm, iar punctele M, N și P sunt de aceeași parte a planului (ABC).

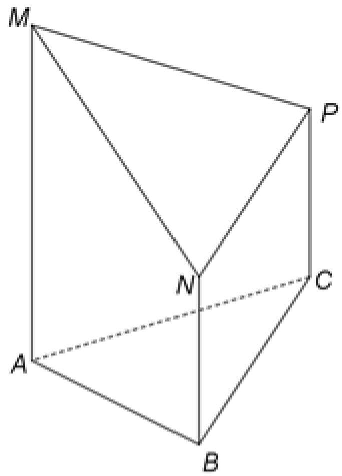


Figura 3

5p **a)** Arătaţi că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 30 cm.

5p **b)** Demonstrați că dreapta BC este paralelă cu planul (ANP).

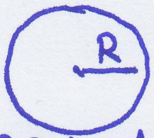
5p **c)** Determinați distanța de la punctul A la planul (MNP).

TESTUL 15: – REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $35-35:(2+5)=35-35:7=35-5=30$.

2) $\left(\frac{1}{4} \text{ din } 20\right)=\frac{1}{4}\cdot 20=\frac{20}{4}=5$.

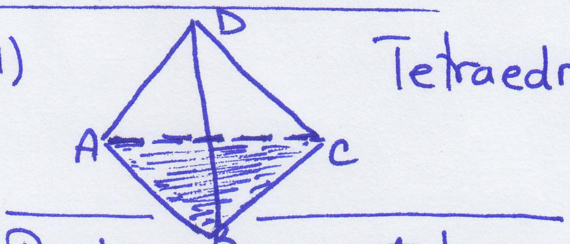
3) Cel mai mare multiplu de 20 din $A=\{10;20;30;\dots;90\}$ este 80.

4) 

$P_{\odot}=2R\cdot\pi=D\cdot\pi=12\pi \Rightarrow D=12$ (cm.)

5.) $BB'=AB=5$ cm. Muchiile cubului sunt egale.

6.) Cel puțin media 9 au obținut $5+2=7$ (elevi).

SUBIECTUL al II-lea: 1) 

Tetraedru = piramidă triunghiulară

2) $\overline{33a}:\overline{x}=c$ rest 8. Restul < împărțitorul $\Rightarrow 8<\overline{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ împărțitorul este 9.

$\overline{33a}:9=c$ rest $8 \Rightarrow \overline{33a}=9c+8$, $(D=C\cdot\hat{I}+R)$.

a: cifră zecimală, $a\in\{0;1;2;\dots;9\} \Rightarrow 330\le\overline{33a}\le 339$

$330:9=36$ rest 6 ; $339:9=37$ rest 6

$$\begin{array}{l}330:9=36\\ \underline{27}\\ \ \ 60\\ \ \ \underline{54}\\ \ \ =6\end{array} \qquad \begin{array}{l}339:9=37\\ \underline{27}\\ \ \ 69\\ \ \ \underline{63}\\ \ \ =6\end{array}$$

De aici deducem că $\overline{33a}:9=36$ rest $8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{33a}=9\cdot 36+8=324+8=332$, deci $\overline{33a}=332$
și atunci $a=2$.

3.) $\left.\begin{array}{l}x=3y\ ;\ m_a(x;y)=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3y+y}{2}=\dfrac{4y}{2}=2y\\ m_a(x;y)=12\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2y=12 \Rightarrow y=12:2=6$ iar $x=3y=3\cdot 6=18$.
Deci cele două numere sunt 6 și 18.

4.) a) $x=7\cdot 2\sqrt{6}-3\sqrt{3}(\cancel{8\sqrt{3}}-\cancel{8\sqrt{3}}+4\sqrt{2})=14\sqrt{6}-3\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}=$
$=14\sqrt{6}-12\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

Deci $x=2\sqrt{6}$, q.e.d.

b) $y=\left(\frac{7}{6\sqrt{2}}-\frac{5}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)\cdot 12\sqrt{2}=$ $\Bigg\}$ $\sqrt{288}=\sqrt{144\cdot 2}=12\sqrt{2}$

$=\frac{7}{6\cancel{\sqrt{2}}}\cdot 12\cancel{\sqrt{2}}-\frac{5}{3\cancel{\sqrt{2}}}\cdot 12\cancel{\sqrt{2}}+\frac{3}{4\cancel{\sqrt{2}}}\cdot 12\cancel{\sqrt{2}}=$

$=\frac{7\cdot \cancel{12}^{2}}{\cancel{6}_{1}}-\frac{5\cdot \cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1}}+\frac{3\cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{4}_{1}}=14-20+9=3.$

[Obs: In barem s-au raționalizat numitorii din paranteză etc...]

$|x-y\sqrt{3}|=|2\sqrt{6}-3\sqrt{3}|=-(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})=-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}=$
$=-x+y\sqrt{3}.$

$2\sqrt{6}\ \boxed{<}\ 3\sqrt{3}\ \Big|\overset{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow}\ 4\cdot 6\ \boxed{<}\ 9\cdot 3 \Leftrightarrow 24\ \boxed{<}\ 27$, deci (q.e.d.)

$2\sqrt{6}-3\sqrt{3}<0$ și atunci și $x-y\sqrt{3}<0$

5) $E(x)=(2x-1)^2-3(x-2)(x+1)+(x+1)^2-x-8=$

$=4x^2-4x+1-3(x^2-x-2)+x^2+2x+1-x-8=$

$=\underline{4x^2}-4x+1-\underline{3x^2}+3x+6+\underline{x^2}+2x+1-x-8=$

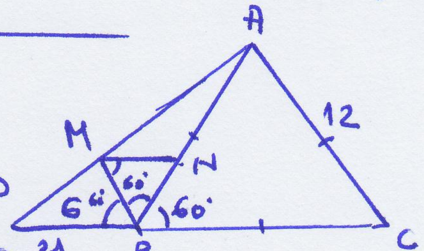
$=2x^2$. Deci $E(x)=2x^2$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Pentru $a\in\mathbb{R}^*$ avem $E(a)=2a^2$ și $E\left(\frac{1}{a}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{2}{a^2}$

$m_g=\sqrt{E(a)\cdot E\left(\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{2\cancel{a^2}\cdot\frac{2}{\cancel{a^2}}}=\sqrt{4}=2$, iar $2\in\mathbb{N}$.

Deci, pentru orice nr. real nenul a, media geometrică a numerelor $E(a)$ și $E\left(\frac{1}{a}\right)$ este numărul natural 2, q.e.d.

SUBIECTUL al III-lea:



1) a) $\mathcal{A}_{\Delta echilateral}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=\frac{12\cdot\cancel{12}^{3}\sqrt{3}}{\cancel{4}_{1}}=36\sqrt{3}\ (cm^2)$

b) ΔABC: echilateral $\Rightarrow m(\widehat{ABC})=m(\widehat{BAC})=m(\hat{C})=60°$.

$\widehat{DBA}$ și $\widehat{ABC}$: suplementare $\Rightarrow m(\widehat{DBA})=120°$. [BM: bisectoarea lui $\widehat{ABD}$ $\Rightarrow m(\widehat{DBM})=m(\widehat{MBA})=\frac{m(\widehat{DBA})}{2}=\frac{120°}{2}=60°$.

$\widehat{DBM}\equiv\widehat{BMN}$ (alterne interne: $MN\parallel DB$ și MB: secantă) $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{BMN})=m(\widehat{DBM})=60°$. Înseamnă că și ΔBMN: echilateral (are

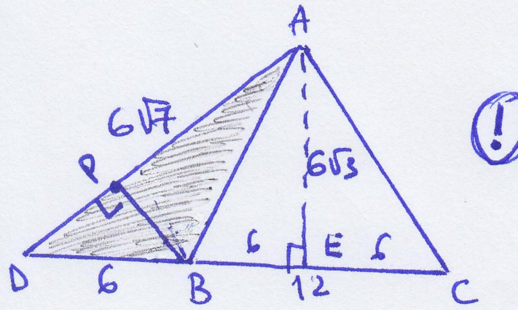
2 unghiuri de 60° => și cel de al 3-lea este tot de 60° (suma măsurilor unghiurilor unui triunghi fiind de 180°).

Deci $\Delta BMN \sim \Delta ABC$ (U.U.); q.e.d.

c) Distanța de la B la AD este egală cu lungimea perpendicularei dusă din B pe AD, adică cu înălțimea din B a triunghiului.

(!) <u>În orice triunghi produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare laturii este constant (este dublul ariei triunghiului).</u>

Ducem $BP \perp AD$ și $AE \perp BD$. AE va fi, de fapt, înălțimea triunghiului echilateral ABC.



$$AE = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ (cm.)$$

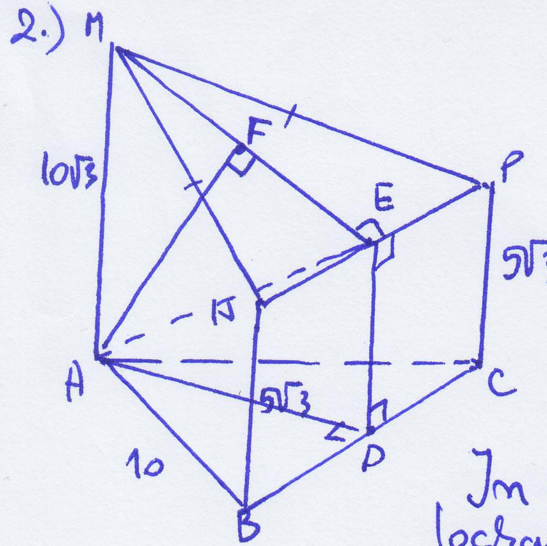
(!) $\boxed{DB \cdot AE = AD \cdot BP}$ (1) pt. ΔBAD.

În ΔAED cu T.P. avem:

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = (6\sqrt{3})^2 + 12^2 = 108 + 144 = 36\cdot 3 + 36 \cdot 4 = 36 \cdot 7 \Rightarrow AD = 6\sqrt{7}\ cm$$

Din (1) $\Rightarrow 6 \cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{7} \cdot BP \Rightarrow BP = \frac{36\sqrt{3}}{6\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ (cm), q.e.d.

2.)



a) ΔABC: echilateral $\Rightarrow AB = AC = BC = 10$ cm.

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 3 \cdot 10 = 30$ (cm), q.e.d.

b) O dreaptă exterioară unui plan este paralelă cu planul dacă este paralelă cu o dreaptă din plan. (1)

În cazul nostru observăm că BCNP: paralelogram (de fapt e dreptunghi), pentru că

$BN \perp (ABC)$; $PC \perp (ABC) \Rightarrow BN \parallel CP$, iar $BN = CP = 5\sqrt{3}$ cm (ip.).

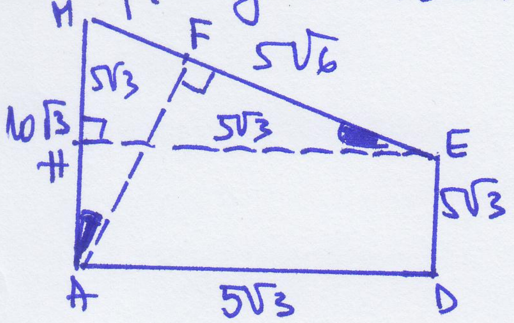
Deci $BC \parallel NP$. Dar $NP \subset (ANP)$. Atunci $BC \parallel (ANP)$, conform (1).

c) <u>Distanța de la un punct la un plan este egală cu lungimea perpendicularei dusă din punct pe plan.</u>

Trapezele AMNB și AMPC sunt trapeze dreptunghice congruente $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta MPN$: isoscel $\Rightarrow ME \perp NP$ e și mediană. Fie D mijlocul lui [BC].

$\left.\begin{array}{l} AD \perp BC \\ AD \perp DE \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AD \perp (BCN) \\ DE \perp NP \end{array}\right| \Rightarrow AE \perp NP$ (T.3.⊥) Ducem $\left.\begin{array}{l} AF \perp ME \\ ME \perp NP \\ AE \perp NP \end{array}\right| \Rightarrow AF \perp (MNP)$ (R.2T3⊥)

Deci $d[A;(MNP)] = AF$. O vom calcula din trapezul dreptunghic ADEM:



$AD = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (cm)

$ED = CP = 5\sqrt{3}$ cm

Ducem $EH \perp AM$ și avem $AH = ED = 5\sqrt{3}$ cm

$EH = AD = 5\sqrt{3}$ cm

$MH = AM - AH = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm

În ΔHME (dr. isoscel) $\Rightarrow ME = a\sqrt{2} = 5\sqrt{3}\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$ (cm)

$\measuredangle MAF \equiv \measuredangle MEH$ (unghiuri cu laturile perpendiculare) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta FAM \sim \Delta HEM$ (U.U.) (dreptunghice și $\widehat{MAF} \equiv \widehat{MEH}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AF}{EH} = \frac{AM}{EM} \Leftrightarrow \frac{AF}{5\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} \Rightarrow AF = \frac{\cancel{5}\sqrt{3} \cdot 10\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{5}\cancel{\sqrt{6}}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{10\sqrt{6}}{2} = 5\sqrt{6}$ (cm.)

Deci $d[A;(MNP)] = 5\sqrt{6}$ cm.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I
- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	30	**5p**
2.	5	**5p**
3.	80	**5p**
4.	12	**5p**
5.	5	**5p**
6.	7	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează tetraedrul Notează tetraedrul $ABCD$	**4p** **1p**
2.	Împărțitorul este număr natural de o cifră și restul este 8, deci împărțitorul este 9	**2p**
	$330 \le \overline{33a} \le 339$ și $\overline{33a} = 9C + 8$, unde C este câtul împărțirii, deci $C = 36$, de unde obținem $a = 2$	**3p**
3.	Media aritmetică a numerelor este $\frac{x+3x}{2} = 12$, unde x este numărul mai mic	**2p**
	Cum $4x = 24$, obținem $x = 6$, deci cele două numere sunt 6 și 18	**3p**
4.	**a)** $x = 14\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\left(8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right) =$	**3p**
	$= 14\sqrt{6} - 12\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$	**2p**
	b) $y = \left(\frac{7\sqrt{2}}{12} - \frac{5\sqrt{2}}{6} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right) \cdot 12\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{24} \cdot 12\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{24} \cdot 12\sqrt{2} = 3$	**3p**
	$\left\|x - y\sqrt{3}\right\| = \left\|2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\right\|$ și, cum $2\sqrt{6} = \sqrt{24} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \left\|2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\right\| = -2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$, obținem $\left\|x - y\sqrt{3}\right\| = -x + y\sqrt{3}$	**2p**
5.	$E(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 3\left(x^2 + x - 2x - 2\right) + x^2 + 2x + 1 - x - 8 =$ $= 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 3x + 6 + x^2 + 2x + 1 - x - 8 = 2x^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$m_g = \sqrt{E(a) \cdot E\left(\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{2a^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{a^2}} = \sqrt{4} = 2$, care este număr natural	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} =$	**2p**
	$= \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**3p**

	b) $m(\sphericalangle ABC)=60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABD)=120^\circ$ și, cum semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABD, obținem $m(\sphericalangle ABM)=60^\circ$	**2p**
	$\sphericalangle MNB$, $\sphericalangle ABC$ sunt alterne interne, $MN \parallel BC$, secanta AB, deci $m(\sphericalangle MNB)=60^\circ \Rightarrow \Delta BMN$ este echilateral, deci $\Delta BMN \sim \Delta ABC$	**3p**
	c) $BD=6\text{cm}$, $AE=6\sqrt{3}\text{cm}$, unde E este mijlocul laturii BC și, cum ΔAED este dreptunghic, obținem $AD=6\sqrt{7}$ cm	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABD}=\dfrac{AE\cdot BD}{2}=\dfrac{d(B,AD)\cdot AD}{2}$, deci $d(B,AD)=\dfrac{AE\cdot BD}{AD}=\dfrac{6\sqrt{3}\cdot 6}{6\sqrt{7}}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ cm	**3p**
2.	**a)** $P_{\Delta ABC}=3AB=$	**2p**
	$=3\cdot 10=30$ cm	**3p**
	b) $BN\perp(ABC)$, $CP\perp(ABC)\Rightarrow BN \parallel CP$ și, cum $BN=CP$, obținem $BCPN$ paralelogram	**2p**
	$BC \parallel NP$ și $NP\subset(ANP)$, deci $BC\parallel(ANP)$	**3p**
	c) $AE\perp NP$, unde $E\in NP$ și, cum $\Delta ABN\equiv\Delta ACP\Rightarrow AN=AP$, obținem că E este mijlocul segmentului NP	**1p**
	D și Q sunt mijloacele segmentelor BC și AM, deci $AD=5\sqrt{3}$ cm, de unde obținem că $ADEQ$ este pătrat și ΔMEQ este dreptunghic isoscel, deci $m(\sphericalangle AEM)=45^\circ+45^\circ=90^\circ$	**2p**
	$AE\perp NP$, $AE\perp ME$ și $NP\cap ME=\{E\}\Rightarrow AE\perp(MNP)\Rightarrow d(AE,(MNP))=AE=5\sqrt{6}$ cm	**2p**