

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 27

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $10 + 6 \cdot (40 - 20 \cdot 2)$ este egal cu
- 5p 2. Numărul care reprezintă o treime din 30 este egal cu
- 5p 3. Cel mai mare număr prim din mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ este
- 5p 4. Pătratul $ABCD$ are perimetrul de 20 cm. Lungimea laturii acestui pătrat este egală cu ... cm.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCD A' B' C' D'$. Unghiul dreptelor BD și $A' C'$ are măsura de ...°.

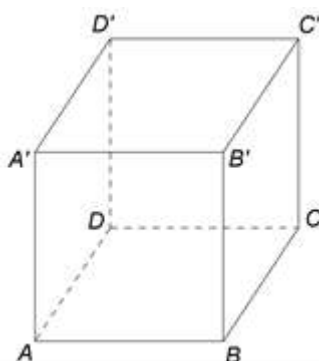
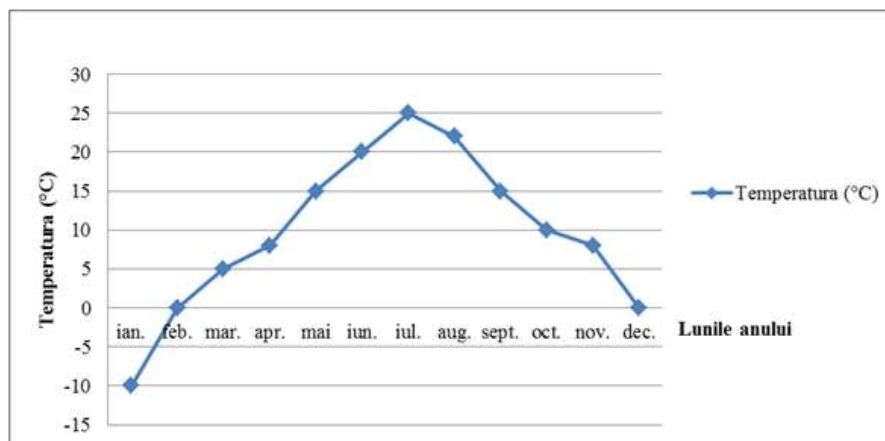


Figura 1

- 5p 6. În diagrama de mai jos sunt prezentate temperaturile medii înregistrate la o stație meteo, pentru fiecare dintre lunile unui an.



Conform informațiilor din diagramă, diferența dintre temperatura înregistrată în luna decembrie și temperatura înregistrată în luna ianuarie este egală cu ...°C.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un dreptunghi $ABCD$.
- 5p 2. Se consideră numerele reale $x = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$ și $y = \left(1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{9}\right)$. Arătați că media aritmetică a numerelor x și y este egală cu 1.
- 5p 3. Prețul unui obiect a crescut cu 10% și apoi noul preț s-a redus cu 10%. Prețul final este egal cu 198 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
4. Se consideră numerele reale $a = (2^{99} + 2^{99}) : 2^{14}$, $b = \sqrt{2^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{50}}{5}$.
- 5p a) Arătați că $a = 2^{30}$.

5p b) Arătați că $a < b^{20}$.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (3x+4)^2 - 2(3x-4)(3x+4) + (3x-4)^2$, unde x este număr real. Determinați numărul natural n pentru care $E(n) = n^3$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat triunghiul echilateral ABC cu $AB = 6\text{ cm}$. Punctele distincte D și E sunt situate în exteriorul triunghiului ABC astfel încât triunghiurile ABD și ACE sunt echilaterale. Punctul M este mijlocul segmentului BC .

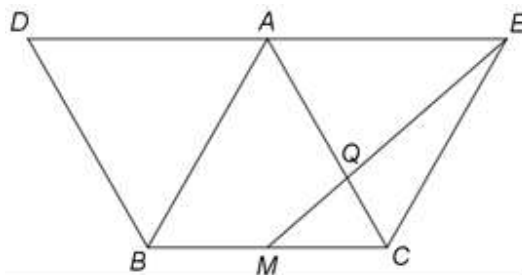


Figura 2

5p a) Arătați că perimetrul patrulaterului $ABCE$ este egal cu 24 cm .

5p b) Determinați distanța de la punctul E la dreapta BD .

5p c) Calculați aria triunghiului CMQ , unde Q este punctul de intersecție a dreptelor AC și EM .

2. În *Figura 3* este reprezentată o prismă patrulateră $ABCD A'B'C'D'$ cu $AA' \perp (ABC)$, $AA' = 12\sqrt{3}\text{ cm}$ și $ABCD$ pătrat cu $AB = 12\text{ cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD , iar punctul M este intersecția dreptelor BC' și $B'C$.

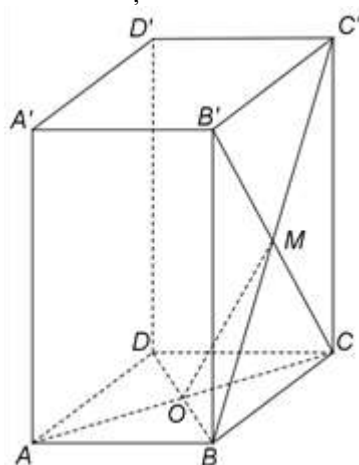


Figura 3

5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu 144 cm^2 .

5p b) Demonstrați că unghiul dreptelor $A'B$ și OM are măsura de 60° .

5p c) Determinați măsura unghiului dintre dreapta OM și planul (BCC') .

TESTUL 27: - REZOLVARE:

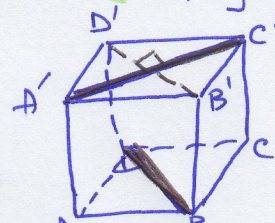
SUBIECTUL I: 1) $10 + 6 \cdot (40 - \underline{20 \cdot 2}) = 10 + 6 \cdot (\underline{40 - 40}) =$
 $= 10 + 6 \cdot 0 = 10 + 0 = \underline{10}.$

2) $(\frac{1}{3} \text{ din } 30) = \frac{1}{3} \cdot \underline{30} = \underline{10};$

3) Cel mai mare nr. prim din $M = \{0; 1; \underline{2}; 3; 4; 5; 6; \underline{7}; 8; 9\}$ este 7.

4) $P_{\square} = 4 \cdot l = 20 \Rightarrow l = 20 : 4 = \underline{5} \text{ (cm)}.$

5) BD și $A'C'$: necoplanare
 $BD \parallel B'D'$ ($BDD'B'$: dreptunghi) $\Rightarrow m(\widehat{BD; A'C'}) =$
 $= m(\widehat{B'D'; A'C'}) = \underline{90^\circ}$

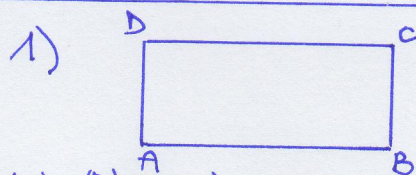


pentru că diagonalele pătratului $A'B'C'D'$ sunt perpendiculare.

6) t în Decembrie: 0°C ; t în ianuarie: -10°C . Diferența a două numere reale a și b este $|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{dacă } a \geq b \\ b-a, & \text{dacă } a < b \end{cases}$

La noi $|0 - (-10)| = |0 + 10| = |10| = 10(^\circ\text{C})$
sau $|-10 - 0| = |-10| = 10(^\circ\text{C}). \Rightarrow$ Diferența este de 10°C .

SUBIECTUL al II-lea:



2) $x = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \frac{4-1}{4} \cdot \frac{5-1}{5} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. Deci $x = \frac{1}{5}$.

$y = \left(1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{9}\right) = \frac{20-8-5}{20} : \frac{27-20}{36} = \frac{7}{20} : \frac{7}{36} =$
 $= \frac{7}{20} \cdot \frac{36}{7} = \frac{9}{5}$. Deci $y = \frac{9}{5}$.

$ma(x; y) = \frac{x+y}{2} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{9}{5}}{2} = \frac{\frac{10}{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, g.e.d.

3.) Notăm cu x prețul inițial.

Crescând cu 10% prețul devine $(110\% \text{ din } x) = \frac{110}{100} \cdot x$.

Noul preț, reducându-se cu 10% devine $(90\% \text{ din } \frac{110}{100} \cdot x) =$
 $= \frac{90}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot x = 198$ ni avem $\frac{99}{100} x = 198 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 198 : \frac{99}{100} = 198 \cdot \frac{100}{99} = 200 \text{ (lei)}.$

R: Prețul inițial a fost de 200 lei.

4) a) $a = (2^{99} + 2^{99}) : 32^{14} = 2 \cdot 2^{99} : (2^5)^{14} = 2^{100} : 2^{70} = 2^{30}$, g.e.d.

b) $b = \sqrt{2^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{50}}{5} =$

$$= 2 - (\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{50}}{5} =$$

$$= 2 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 3, \text{ deci } b = 3.$$

$a \leq b \Leftrightarrow 2^{30} \leq 3^{20} \Leftrightarrow (2^3)^{10} \leq (3^2)^{10} \Leftrightarrow 8^{10} \leq 9^{10}$. Deci $a < b^{20}$, g.e.d.

$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \\ \sqrt{a^2} = |a| \text{ deci} \\ \sqrt{2^2} = |2| = 2 \\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1. \end{array} \right.$

5.) $E(x) = (3x+4)^2 - 2(3x-4)(3x+4) + (3x-4)^2, x \in \mathbb{R}.$

$E(x) = [(3x+4) - (3x-4)]^2 = (3x+4-3x+4)^2 = 8^2 = 64.$

Deci $E(x) = 64$ pentru orice nr. real x . [Obs: Se putea calcula și claric: $(3x+4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$ etc.]

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $E(n) = 64 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3} = (2^2)^3 = 4^3 \Rightarrow n^3 = 4^3 \Rightarrow n = 4.$

$E(n) = n^3$

R: Numărul natural căutat este $n=4$.

SUBIECTUL al III-lea:

1) a) $\triangle ABC$: echilateral
 $AB = 6 \text{ cm}$, atunci
 $AB = BC = CA = 6 \text{ cm}.$

$\triangle ABD$: echilateral $\Rightarrow AB = BD = AD = 6 \text{ cm}.$

$\triangle ACE$: echilateral $\Rightarrow AC = CE = AE = 6 \text{ cm}.$

$P_{ABCE} = AB + BC + CE + EA = 4 \cdot 6 = 24 \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$

b) Observăm că $ABCE$: romb. Diagonalele rombului sunt bisectoare, deci $m(\widehat{ABE}) = \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

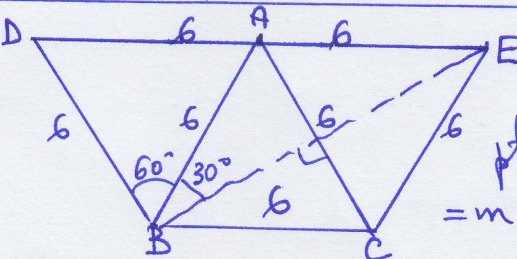
$m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$ (unghi în $\triangle ABD$: echilateral) $\Rightarrow m(\widehat{EBD}) =$

$= m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{ABD}) = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, deci $EB \perp BD$.

Distanța de la un punct la o dreaptă este egală cu lungimea perpendiculararei dusă din punct pe dreaptă, deci $d(E, BD) = EB$.

$EB = 2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$ pentru că este egală cu dublul unei înălțimi a triunghiului echilateral cu latura de 6 cm (acesta poate fi ales $\triangle ABC$ sau $\triangle ACE$).

Deci $d(E, BD) = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$



D, A, E : coliniare
 pt. că $m(\widehat{DAE}) =$
 $= m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAE}) =$
 $= 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$

c) Măsura unghiului format de o dreaptă cu un plan este egală cu măsura unghiului format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

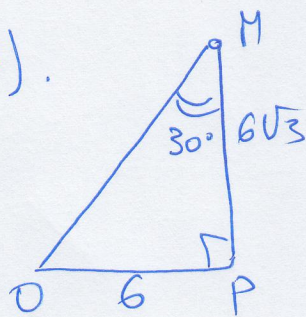
La noi proiecția dreptei OM pe planul (BCC') este PM, unde P este mijlocul lui [BC].

$$\text{Deci } m[\widehat{OM; (BCC')}] = m(\widehat{OM; PM}) = m(\widehat{OMP}).$$

$$OP = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}; MP = \frac{BB'}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{În } \triangle POM \text{ avem } \tan(\widehat{OMP}) = \frac{OP}{PM} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\widehat{OMP}) = 30^\circ$$

$$\text{Deci } m[\widehat{OM; (BCC')}] = 30^\circ.$$



EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 27

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	10	5p
2.	10	5p
3.	7	5p
4.	5	5p
5.	90	5p
6.	10	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează dreptunghiul Notează dreptunghiul $ABCD$	4p 1p
2.	$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ $y = \frac{20-8-5}{20} : \frac{27-20}{36} = \frac{7}{20} : \frac{7}{36} = \frac{7}{20} \cdot \frac{36}{7} = \frac{9}{5} \Rightarrow m_a = \frac{\frac{1}{5} + \frac{9}{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$	2p 3p
3.	$x + \frac{10}{100} \cdot x - \frac{10}{100} \cdot \left(x + \frac{10}{100} \cdot x\right) = 198$, unde x este prețul inițial al obiectului $x = 200$ de lei	3p 2p
4.	a) $a = (2^{99} + 2^{99}) : (2^5)^{14} = (2 \cdot 2^{99}) : 2^{70} = 2^{100} : 2^{70} = 2^{30}$ b) $b = 2 - 1 - \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{5} = 2 - (\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 3$ $a < b^{20} \Leftrightarrow 2^{30} < 3^{20} \Leftrightarrow (2^3)^{10} < (3^2)^{10} \Leftrightarrow 8^{10} < 9^{10}$, relație adevărată	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = ((3x+4) - (3x-4))^2 = (3x+4-3x+4)^2 = 8^2 = 64$, pentru orice număr real x $n^3 = 64 \Leftrightarrow n^3 = 4^3$, de unde obținem $n = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\triangle ABC$ este echilateral, deci $AC = BC = 6$ cm $\triangle ACE$ este echilateral, deci $CE = EA = 6$ cm $\Rightarrow P_{ABCE} = AB + BC + CE + EA = 4 \cdot 6 = 24$ cm	2p 3p
	b) $ABCE$ romb, deci (BE este bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow m(\sphericalangle ABE) = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ și, cum $\triangle ABD$ este echilateral, obținem $m(\sphericalangle DBE) = m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ABE) = 90^\circ \Rightarrow EB \perp BD \Rightarrow d(E, BD) = EB$ $m(\sphericalangle DAE) = m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAE) = 180^\circ \Rightarrow D, A$ și E sunt coliniare, deci $DE = 12$ cm și, cum $\triangle BED$ este dreptunghic, obținem $EB = 6\sqrt{3}$ cm	3p 2p

	c) $BC \parallel AE \Rightarrow \Delta MQC \sim \Delta EQA \Rightarrow \frac{CQ}{QA} = \frac{CM}{AE}$, deci $\frac{CQ}{QA} = \frac{1}{2}$ ΔABC echilateral $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM \parallel QN$, unde $QN \perp BC$, $N \in BC \Rightarrow \Delta CQN \sim \Delta CAM$, deci $\frac{QN}{AM} = \frac{1}{3}$, de unde obținem $\mathcal{A}_{\Delta CMQ} = \frac{1}{2} \cdot QN \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AM \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2$	2p 3p
2.	a) $ABCD$ este pătrat, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 =$ $= 12^2 = 144 \text{cm}^2$	3p 2p
	b) $ABCD$ pătrat, deci O este mijlocul lui AC și $BCC'B'$ dreptunghi, deci M este mijlocul lui $B'C \Rightarrow OM$ linie mijlocie în $\Delta ACB' \Rightarrow OM \parallel AB' \Rightarrow m(\sphericalangle(A'B, OM)) = m(\sphericalangle(A'B, AB'))$ $AA' \perp (ABC) \Rightarrow ABB'A'$ dreptunghi, deci $AB' = \sqrt{144 + 432} = 24 \text{cm}$ și, cum $AB = 12 \text{cm}$, obținem că $m(\sphericalangle AB'B) = 30^\circ$, deci $m(\sphericalangle(A'B, OM)) = m(\sphericalangle(A'B, AB')) = 60^\circ$	3p 2p
	c) $ON \perp BC$, unde N este mijlocul lui BC și, cum $BB' \perp (ABC)$ și $ON \subset (ABC) \Rightarrow BB' \perp ON$ deci, cum $BC \cap BB' = \{B\}$, $ON \perp (BCC') \Rightarrow m(\sphericalangle(OM, (BCC'))) = m(\sphericalangle(OM, MN)) = m(\sphericalangle OMN)$ ΔONM dreptunghic, $ON = 6 \text{cm}$, $OM = 12 \text{cm} \Rightarrow \sin(\sphericalangle OMN) = \frac{ON}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle OMN) = 30^\circ$	3p 2p