

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 6

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $(35 - 35 : 7) \cdot 3$ este egal cu
- 5p 2. Numărul care reprezintă două treimi din 60 este egal cu
- 5p 3. Cel mai mic număr din mulțimea $A = \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -4, \frac{5}{3}\right\}$ este
- 5p 4. Triunghiul dreptunghic ABC are catetele $AB = 12\text{ cm}$ și $AC = 10\text{ cm}$. Aria acestui triunghi este egală cu ... cm^2 .
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Măsura unghiului dreptelor BF și EG este egală cu ... $^\circ$.

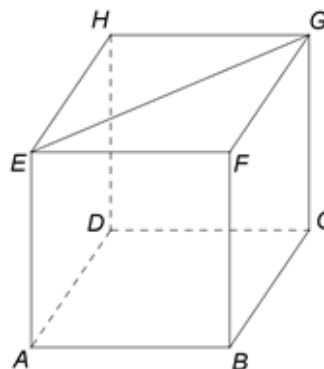
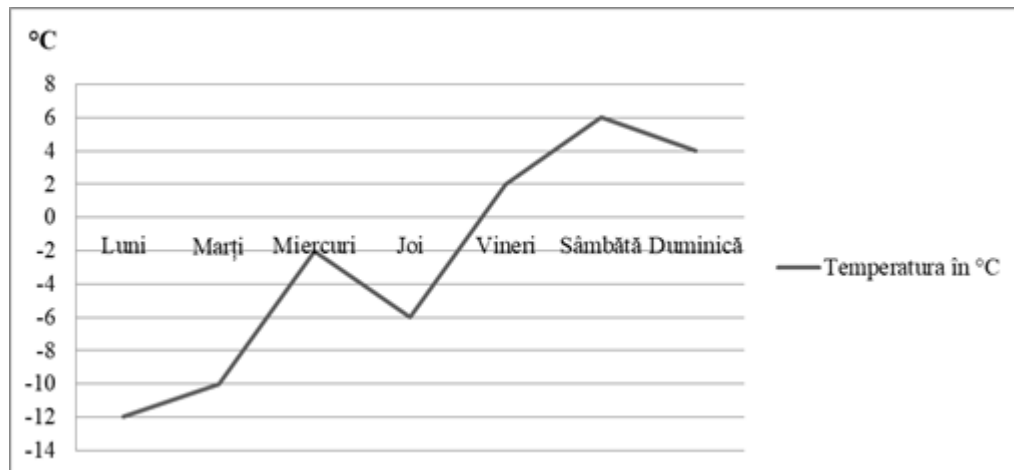


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare sunt prezentate informații despre temperatura, în $^\circ\text{C}$, înregistrată în fiecare dintre zilele unei săptămâni.



Conform informațiilor din diagramă, diferența dintre temperatura înregistrată sâmbătă și cea înregistrată marți este egală cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un triunghi isoscel ABC , dreptunghic în A .
- 5p 2. Numerele naturale a , b , c sunt direct proporționale cu 2, 3, 5. Determinați numerele a , b și c , știind că $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 126$.
- 5p 3. Dublul unui număr real este cu 6 mai mare decât jumătatea acestui număr. Determinați acest număr.

4. Se consideră numerele reale $x = \left(\frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{27}} + \frac{6}{\sqrt{108}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1}$ și $y = (5^6)^3 \cdot 25^3 : 125^8$.

5p a) Arătați că $x = 5$.

5p b) Arătați că media aritmetică a numerelor x și y este un număr natural prim.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = 2(x+3)^2 - (2+x)(x-2) - 2(5x+7)$, unde x este număr real. Demonstrați că $E(x) \geq 7$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, $AB = 8\text{m}$, $CD = 4\text{m}$. Punctele M , N , P și Q sunt mijloacele laturilor AB , BC , CD , respectiv DA și O este punctul de intersecție a diagonalelor trapezului.

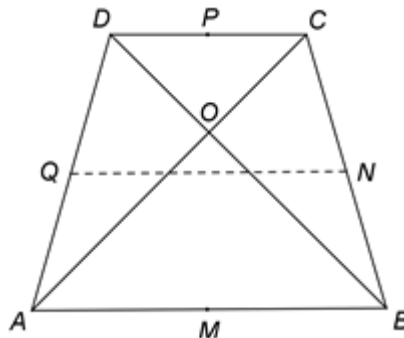


Figura 2

5p a) Arătați că linia mijlocie a trapezului $ABCD$ are lungimea egală cu 6m .

5p b) Arătați că $AD = 2\sqrt{10}\text{m}$.

5p c) Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

2. În Figura 3 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 15\text{cm}$ și $BC = AA' = 6\sqrt{3}\text{cm}$. Punctul M este situat pe latura CD astfel încât $CM = 9\text{cm}$ și punctul N este mijlocul laturii BC .

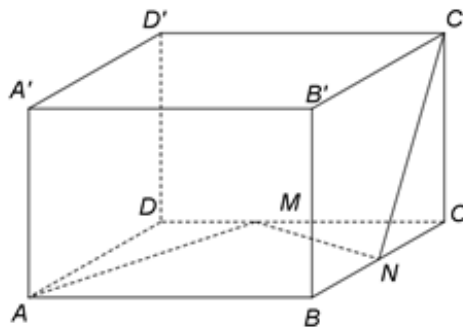


Figura 3

5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABB' A'$ este egală cu $90\sqrt{3}\text{cm}^2$.

5p b) Arătați că distanța de la punctul N la dreapta $C' D'$ este egală cu $3\sqrt{15}\text{cm}$.

5p c) Determinați măsura unghiului dintre dreapta MN și planul (AMA') .

TEST 06 - REZOLVARE :

(Model MEN)

SUBIECTUL I: 1) $(35 - 35 : 7) \cdot 3 = (35 - 5) \cdot 3 = 30 \cdot 3 = 90$.

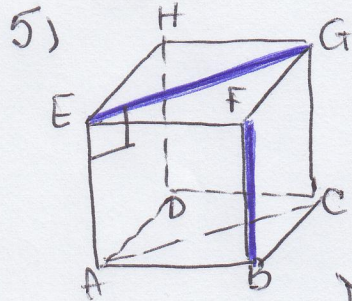
2) $(\frac{2}{3} \text{ din } 60) = \frac{2}{3} \cdot 60 = 2 \cdot 20 = 40$.

3) $A = \{0; \frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -4; \frac{5}{3}\}$ Evident, -4 este cel mai mic.

Obs.: Le reprezentăm pe axă, dar, pt. a le putea compara, le aducem întâi la numitor comun: $\frac{0}{1}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -\frac{4}{1}; \frac{5}{3}$ sunt fracții echivalente cu $\frac{0}{6}; \frac{4}{6}; -\frac{9}{6}; -\frac{24}{6}; \frac{10}{6}$ ni avem



4) $A_{\Delta dr} = \frac{C_1 \cdot C_2}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}.$

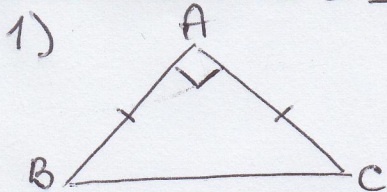


5) $BF \perp (EFGH)$ și o dr. $\perp$ pe plan este $\perp$ pe orice "dreaptă din plan", iar $EG \subset (EFGH) \Rightarrow BF \perp EG$, deci formează un unghi de 90° .

Altfel argumentat: EG și BF : necoplanare. Dacă $AE \parallel BF$, atunci $m(\widehat{BF; EG}) = m(\widehat{AE; EG}) = 90^\circ$, pentru că $AE \perp EG$: dreptunghi ($AE \perp (EFG) \Rightarrow AE \perp EG$).

6) $6 - (-10) = 6 + 10 = 16 (^\circ\text{C})$

SUBIECTUL al II-lea:



2) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow \begin{cases} a=2k \\ b=3k \\ c=5k \end{cases}$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 126 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2k-3k)^2 + (3k-5k)^2 + (5k-2k)^2 &= 126 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-k)^2 + (-2k)^2 + (3k)^2 &= 126 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k^2 + 4k^2 + 9k^2 &= 126 \Leftrightarrow 14k^2 = 126 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{126}{14} \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{aligned}$$

Pentru $k=3$ avem $a=6; b=9; c=15$, numere naturale.

Obs.: pt. $k=-3$ avem $a=-6; b=-9; c=-15$, care $\notin \mathbb{N}$.

3) Notăm cu x numărul real căutat.

Avem dublul lui x egal cu $2x$, iar jumătatea lui x egală cu $\frac{x}{2}$. Conform enunțului, avem ecuația $2x = \frac{x}{2} + 6 \quad | \cdot 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x = x + 12 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4. \text{ R: Nr. este } 4.$$

$$\checkmark: 2 \cdot 4 = \frac{4}{2} + 6 \Leftrightarrow 8 = 2 + 6 \text{ (A). } \checkmark$$

$$4) a) x = \left(\frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{27}} + \frac{6}{\sqrt{108}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1} = \begin{cases} \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3} \\ \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$= \left(\frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{9}{3\sqrt{3}} + \frac{6}{6\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 5, \text{ deci } x = 5. \text{ (g.e.d.)}$$

$$b) y = (5^6)^3 \cdot 25^3 : 125^8 =$$

$$= (5^6)^3 \cdot (5^2)^3 : (5^3)^8 =$$

$$= 5^{18} \cdot 5^6 : 5^{24} = 5^{24} : 5^{24} = 1$$

$$\text{deci } y = 1.$$

$$m_a(x; y) = \frac{x+y}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{cases} 25 = 5^2 \\ 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ a^m : a^n = a^{m-n} \\ a^0 = 1; (a \neq 0) \end{cases}$$

3 este număr prim.

Deci media aritmetică a numerelor x și y este numărul prim 3, (g.e.d.).

$$5) E(x) = 2(x+3)^2 - (2x)(x-2) - 2(5x+7) = 2(x^2+6x+9) -$$

$$-(x^2-4) - 10x - 14 =$$

$$= \underline{2x^2 + 12x + 18} - \underline{x^2 + 4} - \underline{10x - 14} =$$

$$= x^2 + 2x + 8$$

$$\begin{cases} (2+x)(x-2) = \\ = (x-2)(x+2) = x^2 - 4 \end{cases}$$

Deci $E(x) = x^2 + 2x + 8$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

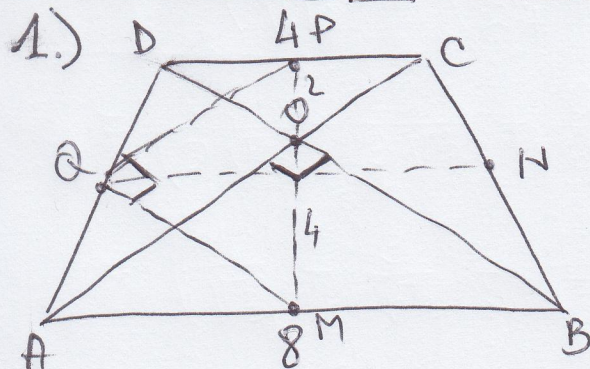
Avem, mai departe, $E(x) = \underline{x^2 + 2x + 1} + 7 =$

$$= \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 7 \Rightarrow E(x) \geq 7, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, \text{ (g.e.d.)}$$

(deoarece $(x+1)^2 \geq 0$ pt. orice $x \in \mathbb{R}$)

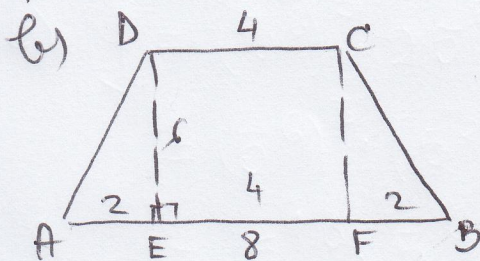
Obs: Atenție la astfel de probleme pentru că, în condițiile eliminării „facturilor algebrice” din programa de examen, este cam singurul tip de probleme de calcul algebric care se poate da la examen.

SUBIECTUL al III-lea:



a) Linia mijlocie a trapezului ABCD este QN.

$$QN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (m)}, \text{ g. e. d.}$$



Ducem înălțimile $DE \perp AB$; $CF \perp AB$ și avem CDEF: dreptunghi

$$EF = CD = 4 \text{ m.}$$

$$ABCD: \text{trapez isoscel} \Rightarrow AE = FB = \frac{AB - EF}{2} = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (m)}$$

$\triangle OCD$: dreptunghi (isoscel), OP : mediană $\Rightarrow OP = \frac{CD}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (m)}$

$\triangle OAB$: ————, OM : mediană $\Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (m)}$

$$\text{Atunci } MP = OP + OM = 4 + 2 = 6 \text{ (m).}$$

(Aici argumentăm astfel: $AB \parallel CD$, $OP \perp CD$, $OM \perp AB$ } $\Rightarrow M, O, P$: coliniare)

Atunci, în $\triangle AED$, dreptunghi în E , avem $DE = MN = 6 \text{ cm}$ și cu T. Pitagora obținem $AD^2 = AE^2 + ED^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40 \Rightarrow AD = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ (m)}, \text{ g. e. d.}$ [ATENȚIE! u.m. = m (nu cm)]

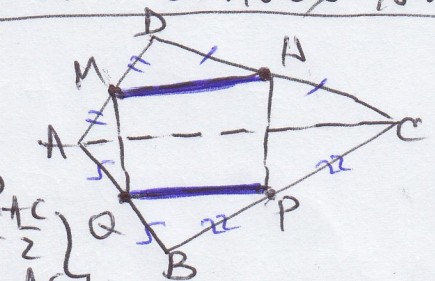
c) Aici trebuie știut că:

Ⓐ Mijloacele laturilor unui patrulater convex sunt vârfurile unui paralelogram.

Într-adevăr, în figura alăturată,

MN : lin. mijl. în $\triangle DAC \Rightarrow MN \parallel AC$; $MN = \frac{AC}{2}$

QP : ———— $\triangle BAC \Rightarrow PQ \parallel AC$; $PQ = \frac{AC}{2}$



$\Rightarrow MN \parallel PQ$ și $MN = PQ$

deci MNPQ este, într-adevăr, paralelogram.

În baza lemei Ⓐ demonstrată anterior, avem că $MNPQ$: paralelogram.

$\Rightarrow MNPQ$: dreptunghi.

Dar $MP = NQ = 6 \text{ (m)}$

$MQ \parallel BD$ (lin. mijl. în $\triangle ABD$) iar $AC \perp BD$

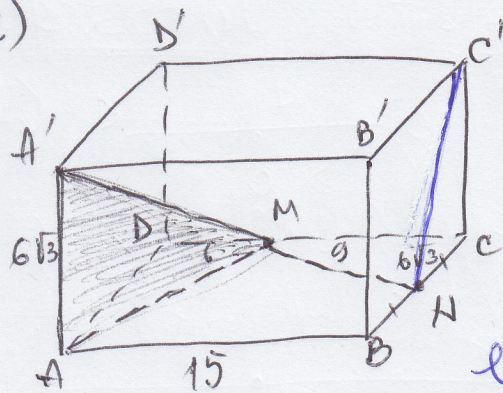
$PQ \parallel AC$ (lin. mijl. în $\triangle DAC$) și $AC = BD$ (diag. în trap. isoscel)

$\Rightarrow MQ \perp QP$, $HQ = QP$

(diag. în trap. isoscel)

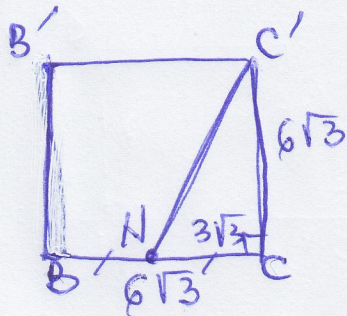
g. e. d. $\Rightarrow MPQ$: patrulater, g. e. d.

2)



a) $ABB'A'$ este un dreptunghi în care avem $AB = 15 \text{ cm}$, $AA' = 6\sqrt{3} \text{ cm}$,
 $A_{ABB'A'} = L \cdot l = AB \cdot AA' = 15 \cdot 6\sqrt{3} = 90\sqrt{3} (\text{cm}^2)$, g.e.d.

b) $NC \perp (CC'D')$ | T.B. $\perp$
 $CC' \perp C'D'$ | $\Rightarrow NC' \perp C'D'$,
 deci $d(N; C'D') = NC'$



$BCC'B'$: pătrat cu latura de $6\sqrt{3} \text{ cm}$.

$$NC = BC : 2 = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} (\text{cm}).$$

T.P. în $\triangle CNC'$ cu $m(\hat{C}) = 90^\circ$:

$$NC'^2 = CN^2 + CC'^2 = (3\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 = 27 + 108 = 135 \Rightarrow NC' = \sqrt{135} = \sqrt{9 \cdot 15} = 3\sqrt{15} (\text{cm})$$

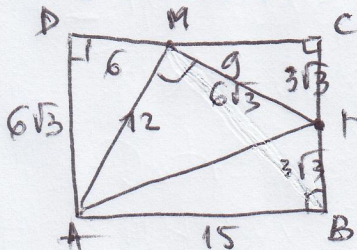
Deci $d(N; C'D') = NC' = 3\sqrt{15} \text{ cm}$, g.e.d.

c) Unghiul dintre o dreaptă și un plan are măsura egală cu a unghiului format de dreapta cu proiecția ei pe plan.

În cazul nostru trebuie găsită proiecția dreptei MN pe planul (AMA') .

Punctul $M \in (AMA')$, deci dreapta MN întâlnește planul (AMA') în M .

Considerăm dreptunghiul $ABCD$ în care avem:



$$\text{T.P. în } \triangle DAM \Rightarrow AM^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 108 + 36 = 144 \Rightarrow AM = 12 \text{ cm}$$

$$\text{T.P. în } \triangle CMN \Rightarrow MN^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2 = 81 + 27 = 108 \Rightarrow MN = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{T.P. în } \triangle BAN \Rightarrow AN^2 = 15^2 + (3\sqrt{3})^2 = 225 + 27 = 252 \Rightarrow AN = 6\sqrt{7} \text{ cm}$$

Observăm că $AN^2 = AM^2 + MN^2$ pt. că $252 = 144 + 108 \Rightarrow \triangle MAN$: dreptunghic în M , conform R.T. Pitagora, deci $NM \perp MA$. (1)

Pe de altă parte $AA' \perp (ABC)$ | $\Rightarrow AA' \perp NM$, deci $NM \perp AA'$ (2) } $\Rightarrow$
 $NM \subset (ABC)$

$\Rightarrow NM \perp (AMA')$, fiind perpendiculară pe cele două drepte concurente AA' și AM , continuate în plan.

Deci $m(NM; (AMA')) = 90^\circ$, dreapta fiind $\perp$ pe plan.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	90	5p
2.	40	5p
3.	-4	5p
4.	60	5p
5.	90	5p
6.	16	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează triunghiul dreptunghic isoscel Notează triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A	4p 1p
2.	$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$, unde k este un număr rațional, deci $a = 2k$, $b = 3k$ și $c = 5k$ $(2k - 3k)^2 + (3k - 5k)^2 + (5k - 2k)^2 = 126 \Leftrightarrow k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 126$, deci $k^2 = 9$ și, cum a , b și c sunt numere naturale, obținem $a = 6$, $b = 9$ și $c = 15$	2p 3p
3.	$2x = \frac{x}{2} + 6$, unde x este numărul real $x = 4$	2p 3p
4.	a) $x = \left(\frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{9}{3\sqrt{3}} + \frac{6}{6\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} =$ $= \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = 5$ b) $y = 5^{18} \cdot (5^2)^3 : (5^3)^8 = 5^{18+6-24} = 5^0 = 1$ Media aritmetică a numerelor x și y este $m_a = \frac{x+y}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$, care este număr natural prim	3p 2p 3p
5.	$E(x) = 2(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 4) - 10x - 14 = 2x^2 + 12x + 18 - x^2 + 4 - 10x - 14 =$ $= x^2 + 2x + 8 = x^2 + 2x + 1 + 7 = (x+1)^2 + 7 \geq 7$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) Linia mijlocie a trapezului $ABCD$ are lungimea egală cu $\frac{AB+CD}{2} =$ $= \frac{8+4}{2} = 6\text{m}$	3p 2p
----	--	----------

	b) $\triangle AOB$ este dreptunghic isoscel, deci $AO = 4\sqrt{2}$ m și $\triangle COD$ este dreptunghic isoscel, deci $DO = 2\sqrt{2}$ m	2p
	$\triangle AOD$ este dreptunghic, deci $AD^2 = AO^2 + DO^2$, de unde obținem $AD = \sqrt{32 + 8} = 2\sqrt{10}$ m	3p
	c) NP este linie mijlocie în $\triangle BCD$, deci $NP \parallel BD$ și $NP = \frac{BD}{2}$, iar MQ este linie mijlocie în $\triangle ABD$, deci $MQ \parallel BD$ și $MQ = \frac{BD}{2}$; obținem $MQ \parallel NP$ și $MQ = NP$, deci $MNPQ$ este paralelogram	3p
	MN este linie mijlocie în $\triangle ABC$, deci $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{AC}{2}$ și, cum $AC \perp BD$ și $AC = BD$, obținem $MN \perp NP$ și $MN = NP$, deci $MNPQ$ este pătrat	2p
2.	a) $ABB'A'$ este dreptunghi, deci $\mathcal{A}_{ABB'A'} = AB \cdot AA' =$ $= 15 \cdot 6\sqrt{3} = 90\sqrt{3} \text{ cm}^2$	3p
	b) $C'D' \perp CC'$, $C'D' \perp B'C'$ și $CC' \cap B'C' = \{C'\} \Rightarrow C'D' \perp (BCC')$ și, cum $NC' \subset (BCC')$, obținem $NC' \perp C'D'$, deci $d(N, C'D') = NC'$ $\triangle CC'N$ este dreptunghic, deci $NC'^2 = C'C^2 + CN^2 \Rightarrow NC' = \sqrt{108 + 27} = 3\sqrt{15}$ cm	3p
	c) $AA' \perp AB$, $AA' \perp AD$ și $AB \cap AD = \{A\}$, deci $AA' \perp (ABC)$ și, cum $MN \subset (ABC)$, obținem $AA' \perp MN$ $\triangle ADM$ dreptunghic, $\text{tg}(\sphericalangle AMD) = \frac{AD}{DM} = \sqrt{3} \Rightarrow m(\sphericalangle AMD) = 60^\circ$ și $\triangle CMN$ dreptunghic, $\text{tg}(\sphericalangle CMN) = \frac{CN}{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\sphericalangle CMN) = 30^\circ$, deci $m(\sphericalangle AMN) = 90^\circ \Rightarrow MN \perp AM$ $MN \perp AA'$, $MN \perp AM$ și $AA' \cap AM = \{A\} \Rightarrow MN \perp (AMA')$, deci măsura unghiului dintre dreapta MN și planul (AMA') este de 90°	1p
		3p
		1p