

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 9

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

5p 1. Rezultatul calculului $(20 - 2 \cdot 4) : 4$ este egal cu

5p 2. Dacă $\frac{x+3}{5} = \frac{14}{10}$, atunci numărul real x este egal cu

5p 3. Numărul de elemente ale mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ este egal cu

5p 4. Linia mijlocie a trapezului $ABCD$ este de 10cm. Suma lungimilor bazelor acestui trapez este egală cu ...cm.

5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCD A' B' C' D'$. Unghiul dreptelor AB și $B' C'$ are măsura de ...°.

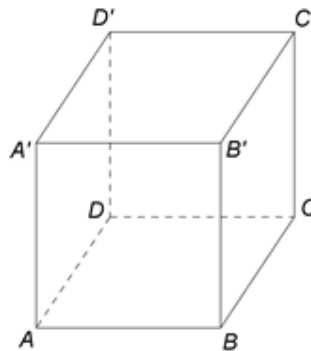
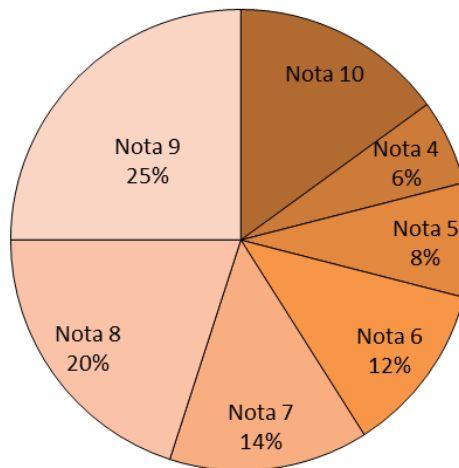


Figura 1

5p 6. În diagrama de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei școli la un concurs.



Conform informațiilor din diagramă, note mai mari sau egale cu 9 au fost obținute de ...% din numărul elevilor care au participat la concurs.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un tetraedru $ABCD$.

5p 2. Arătați că media geometrică a numerelor $x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{2}$ și $y = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{12}$ este egală cu 2.

5p 3. Într-o cutie sunt bile albe, 6 bile roșii și 10 bile galbene. Probabilitatea de a extrage o bilă albă din cutie este egală cu $\frac{5}{9}$. Determinați numărul de bile albe din cutie.

4. Se consideră numerele reale $a = (\sqrt{98} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}) : \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $b = \left(\frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{27}}{18} \right) : \frac{3}{\sqrt{3}}$.

5p a) Arătați că $a = 2$.

5p b) Calculați $(a - b)^{2020}$.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = x(x+3)^2 - 2(x-1)^2 - (2x-3)(2x+3) - (17x+7)$, unde x este număr real. Arătați că $\frac{E(3)}{1 \cdot 5} + \frac{E(4)}{2 \cdot 6} + \frac{E(5)}{3 \cdot 7} + \dots + \frac{E(100)}{98 \cdot 102} = 5047$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB = 15\text{cm}$, punctul M este mijlocul laturii AB și punctul O este intersecția diagonalelor pătratului. E și F sunt punctele de intersecție a dreptelor AC și DM , respectiv BD și CM .

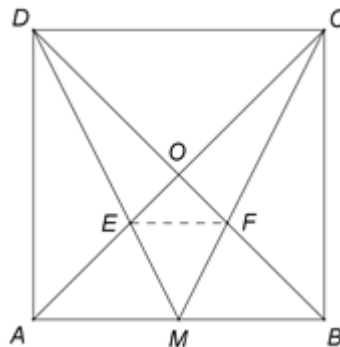


Figura 2

5p a) Arătați că aria pătratului $ABCD$ este egală cu 225cm^2 .

5p b) Demonstrați că triunghiurile ADE și BCF sunt congruente.

5p c) Calculați lungimea segmentului EF .

2. În Figura 3 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 8\text{dm}$, $BC = 6\text{dm}$ și $AA' = 15\text{dm}$.

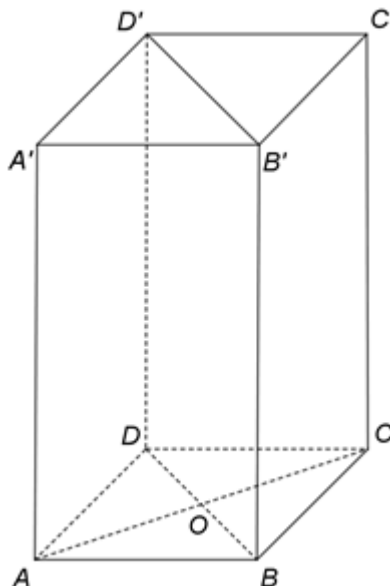


Figura 3

5p a) Arătați că suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului este egală cu 116dm .

5p b) Demonstrați că distanța de la punctul A la planul (BDD') este egală cu $4,8\text{dm}$.

5p c) Demonstrați că, dacă punctul M este simetricul punctului A față de punctul B , atunci planele $(CC'M)$ și $(BB'D)$ sunt paralele.

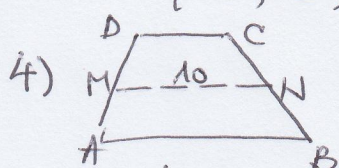
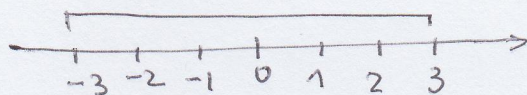
TEST 09 - REZOLVARE:

SUBIECTUL I: 1) $(20 - 2 \cdot 4) : 4 = (20 - 8) : 4 = 12 : 4 = 3$.

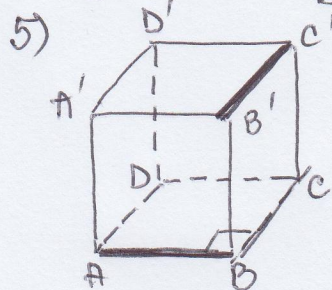
2) $\frac{x+3}{5} = \frac{14}{10} \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{7}{5} \mid \cdot 5 \Leftrightarrow x+3 = 7 \Leftrightarrow x = 7-3 = 4$.

Obs. [sau, aflând un termen necunoscut al proporției date:
 $x+3 = \frac{5 \cdot 14}{10} \Leftrightarrow x+3 = 7 \Leftrightarrow x = 7-3 \Leftrightarrow x = 4$.]

3) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Numărul de elemente ale mulțimii A este egal cu 7.



$MN = \frac{AB+CD}{2} = 10 \Rightarrow AB+CD = 2 \cdot 10 = 20$ (cu.)



5) $AB \cap B'C' : \text{necoplanare} \mid \Rightarrow m(\widehat{AB; B'C'}) = m(\widehat{AB; BC}) = m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$.

6) Nota 10 au obținut-o 15% din elevi, anume:
 $100\% - (6\% + 8\% + 12\% + 14\% + 20\% + 25\%) = 100\% - 85\% = 15\%$.

Nota 9 au 25%, nota 10 au 15%, deci note mai mari sau egale cu 9 au $25\% + 15\% = 40\%$.

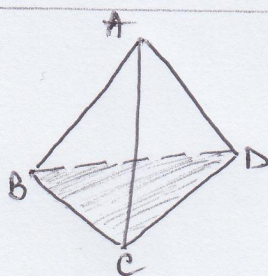
SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} =$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

$y = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 = 6 - 4 + 2 = 4$.



tetraedru = piramidă triunghiulară

Obs: Am calculat x și y aplicând distributivitatea în mulțiri față de adunare și scădere, dar x și y se puteau calcula direct, efectuând mai întâi operațiile din paranteze.

$m_g(x; y) = \sqrt{xy} = \sqrt{1 \cdot 4} = \sqrt{4} = 2$, g.e.d.

3) Notăm cu x numărul bilelor albe. $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$,

$$\text{deci } \frac{5}{9} = \frac{x}{x+6+10} \text{ și avem } 5(x+16) = 9x \Leftrightarrow 5x+80=9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x-5x=80 \Leftrightarrow 4x=80 \Leftrightarrow x=80:4 \Leftrightarrow x=20.$$

Numărul de bile albe din cutie este 20.

$$4) a) a = (\sqrt{98} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}) : \frac{1}{\sqrt{2}} = (7\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2. \text{ Deci } a=2, \text{ g.e.d.}$$

$$b) b = \left(\frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{24}}{18} \right) : \frac{3}{\sqrt{3}} = \left(\frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{18} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{18} =$$

$$= \frac{14+3+1}{6} = \frac{18}{6} = 3. \text{ Deci } b=3.$$

$$(a-b)^{2020} = (2-3)^{2020} = (-1)^{2020} = 1.$$

$$5) E(x) = x(x+3)^2 - 2(x-1)^2 - (2x-3)(2x+3) - (17x+7) =$$

$$= x(x^2+6x+9) - 2(x^2-2x+1) - (4x^2-9) - (17x+7) =$$

$$= x^3 + 6x^2 + 9x - 2x^2 + 4x - 2 - 4x^2 + 9 - 17x - 7 =$$

$$= x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Avem $E(3) = (3-2) \cdot 3 \cdot (3+2) = 1 \cdot 3 \cdot 5$ deci $\frac{E(3)}{1 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 5} = 3$

$E(4) = (4-2) \cdot 4 \cdot (4+2) = 2 \cdot 4 \cdot 6$ deci $\frac{E(4)}{2 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 4$

$E(5) = (5-2) \cdot 5 \cdot (5+2) = 3 \cdot 5 \cdot 7$ deci $\frac{E(5)}{3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7} = 5$

.....

$E(100) = (100-2) \cdot 100 \cdot (100+2) = 98 \cdot 100 \cdot 102,$

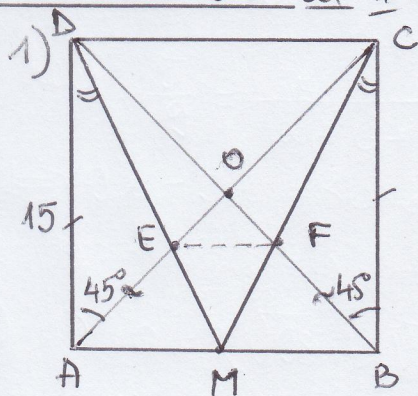
$$\text{deci } \frac{E(100)}{98 \cdot 102} = \frac{98 \cdot 100 \cdot 102}{98 \cdot 102} = 100.$$

Avem $\frac{E(3)}{1 \cdot 5} + \frac{E(4)}{2 \cdot 6} + \frac{E(5)}{3 \cdot 7} + \dots + \frac{E(100)}{98 \cdot 102} =$

$$= 3 + 4 + 5 + \dots + 100 = \overbrace{1+2+3+4+5+\dots+100}^{\text{sumă Gauss}} -$$

$$- (1+2) = \frac{100 \cdot 101}{2} - 3 = 5050 - 3 = 5047, \text{ g.e.d.}$$

SUBIECTUL al III-lea:



a) $A_{ABCD} = a^2 = AB^2 = 15^2 = 15 \cdot 15 = 225 \text{ (cm}^2\text{)}$
g.e.d.

b) Mai întâi observăm că

$$\left. \begin{array}{l} \triangle DAM \equiv \triangle CBM \text{ (C.C.)} \\ \text{- dreptunghice} \\ [DA] \equiv [CB] \\ [AM] \equiv [BM] \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADM} \equiv \widehat{BCM} \text{ (1)}$$

$\triangle ADE \equiv \triangle BCF \text{ (U.L.U.)}$, g.e.d.

$$\left\{ \begin{array}{l} [AD] \equiv [BC] \\ \widehat{DAE} \equiv \widehat{CBF} \text{ (au } 45^\circ) \\ \widehat{ADE} \equiv \widehat{BCF} \text{ (pt. c. } \widehat{ADM} \equiv \widehat{BCM} \text{ (1))} \end{array} \right.$$

c) $\triangle EAM \sim \triangle ECD \text{ (T.f.N.)} \Rightarrow \frac{EM}{ED} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$; $(AM = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2})$

Din $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$, demonstrată la b) $\Rightarrow [EA] \equiv [FB]$.

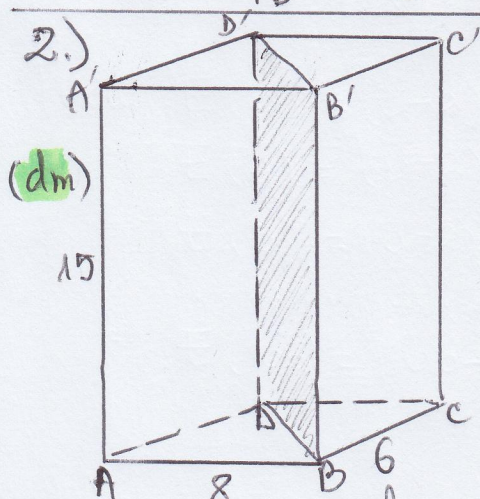
Dar $[OA] \equiv [OB]$ și atunci $\frac{EA}{OA} = \frac{FB}{OB} \Rightarrow EF \parallel AB \text{ (R.T. Thales)}$

$EF \parallel AB \parallel CD \Rightarrow EF \parallel CD \Rightarrow \triangle MEF \sim \triangle MDC \text{ (T.f.N.)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ME}{MD} = \frac{MF}{MC} = \frac{EF}{CD}$. Din relația ② avem $\frac{ME}{DE} = \frac{1}{2} \} \Leftrightarrow$

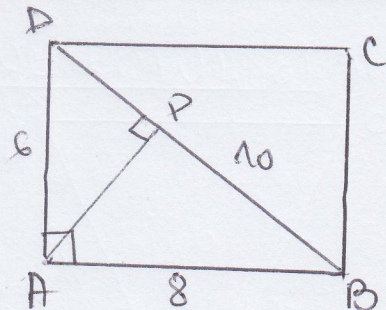
$\Leftrightarrow \frac{ME}{ME+DE} = \frac{1}{1+2} \Leftrightarrow \frac{ME}{MD} = \frac{1}{3} \} \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{EF}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = \frac{15}{3} = 5 \text{ (cm.)}$.



a) Suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ este egală cu $4 \cdot AB + 4 \cdot BC + 4 \cdot AA' =$
 $= (4 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 15) = 4 \cdot (8 + 6 + 15) =$
 $= 4 \cdot 29 = 116 \text{ (dm)}, \text{ g.e.d.}$

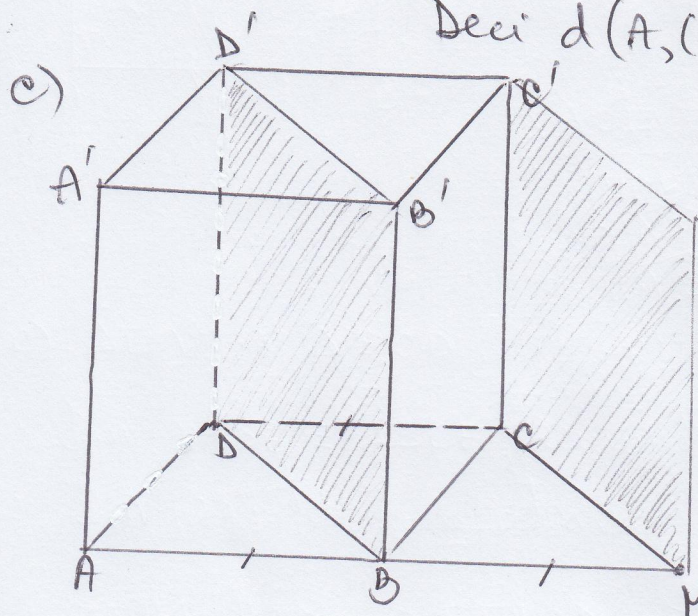
b) Distanța de la un punct la un plan este egală cu lungimea perpendicularei din punct pe plan. La noi planele (ABC) și (BDD') sunt perpendiculare pentru că unul din ele, de exemplu (BDD') , conține o dreaptă, anume BB' , perpendiculară pe celălalt. Deci, dacă ducem $AP \perp BD$, atunci $AP \perp (BDD')$ și avem $d(A, (BDD')) = AP$.



În $\triangle ABD$, dreptunghic în A avem cu T. Pitagora: $BD^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BD = 10 \text{ dm}$
 Cu a $\perp$ - a T. a înălțimii avem:

$$BD \cdot AP = AB \cdot AD \Leftrightarrow 10 \cdot AP = 8 \cdot 6 \Leftrightarrow AP = \frac{48}{10} = 4,8 \text{ (dm.)}$$

Deci $d(A, (BDD')) = AP = 4,8 \text{ dm}$, g. e. d.



Pentru ca două plane să fie paralele trebuie ca unul dintre ele să conțină două drepte concurente paralele cu celălalt. De asemenea, o dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă din plan.

Vom demonstra, pe rând, că aceste cerințe sunt îndeplinite pentru planele $(CC'M)$ și $(BB'D)$.

$$\left. \begin{array}{l} CC' \parallel BB' \\ BB' \subset (BB'D) \end{array} \right\} \Rightarrow CC' \parallel (BB'D) \text{ (una din cele două drepte concurente)} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow BM \parallel CD \\ CD = AB = BM \Rightarrow BM = CD \end{array} \right\} \Rightarrow BMCD: \text{paralelogram} \Rightarrow \begin{array}{l} \Rightarrow CM \parallel BD \\ BD \subset (BB'D) \end{array} \Rightarrow CM \parallel (BB'D) \text{ (celălaltă dreaptă)} \quad (2)$$

Din (1) și (2) și faptul că CM și CC' sunt concurente în C rezultă că $(CC'M) \parallel (BB'D)$, g. e. d.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	3	5p
2.	4	5p
3.	7	5p
4.	20	5p
5.	90	5p
6.	40	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează tetraedrul Notează tetraedrul $ABCD$	4p 1p
2.	$x = \frac{3+2-1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2} = 1$ $y = \frac{3-2+1}{6} \cdot \frac{12}{1} = 4 \Rightarrow m_g = \sqrt{xy} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$	2p 3p
3.	$\frac{n}{n+6+10} = \frac{5}{9}$, unde n este numărul de bile albe $9n = 5n + 80$, deci $n = 20$	3p 2p
4.	a) $a = (7\sqrt{2} - 2 \cdot 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} =$ $= (7\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ b) $b = \left(\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$ $(a-b)^{2020} = (2-3)^{2020} = (-1)^{2020} = 1$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = x(x^2 + 6x + 9) - 2(x^2 - 2x + 1) - (4x^2 - 9) - 17x - 7 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$, pentru orice număr real x $\frac{3 \cdot 1 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 6}{2 \cdot 6} + \dots + \frac{100 \cdot 98 \cdot 102}{98 \cdot 102} = 3 + 4 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} - 1 - 2 = 5047$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 =$ $= 15^2 = 225 \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) $\triangle ADM \equiv \triangle BCM \Rightarrow \sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle BCM$ Cum $ABCD$ este pătrat, deci $AD = BC$ și $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle FBC$, obținem $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$	2p 3p

	c) E este centrul de greutate al $\triangle ABD$, deci $\frac{OE}{OA} = \frac{1}{3}$ și F este centrul de greutate al $\triangle ABC$, deci $\frac{OF}{OB} = \frac{1}{3}$ $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{1}{3}$, deci $EF = 5\text{ cm}$	2p 3p
2.	a) Suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului este egală cu $4(AB + BC + AA') =$ $= 4(8 + 6 + 15) = 4 \cdot 29 = 116\text{ dm}$	2p 3p
	b) Pentru $AE \perp BD$, unde $E \in BD$, $DD' \perp (ADC) \Rightarrow DD' \perp AE$ și, cum $BD \cap DD' = \{D\}$, obținem $AE \perp (BDD')$, deci $d(A, (BDD')) = AE$ $\triangle ABD$ este dreptunghic, deci $AE = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4,8\text{ dm}$	3p 2p
	c) B este mijlocul segmentului $AM \Rightarrow AB = BM$, deci $BM = DC$ și, cum $BM \parallel DC$, obținem $BMCD$ paralelogram $CC' \parallel DD'$, $CM \parallel BD$, $CC' \cap CM = \{C\}$ și $DD' \cap BD = \{D\} \Rightarrow (CC'M) \parallel (BB'D)$	2p 3p