**EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a**
**Matematică**

**Test 12**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

**SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. (30 de puncte)**

**5p** **1.** Rezultatul calculului $8\cdot 6-6:2$ este egal cu … .

**5p** **2.** Opt cărți de acelaşi fel costă în total $40$ de lei. Două dintre aceste cărți costă în total … lei.

**5p** **3.** Cel mai mic număr natural care aparţine intervalului $[-3,\ 4]$ este … .

**5p** **4.** Dreptunghiul $ABCD$ are $AB=6$ cm și $BC=4$ cm . Perimetrul acestui dreptunghi este egal cu … cm.

**5p** **5.** În *Figura 1* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Unghiul dreptelor $AD$ şi $BB'$ are măsura de …° .

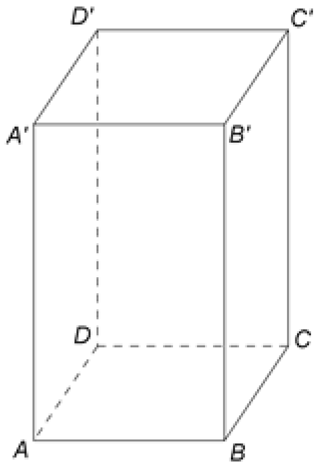
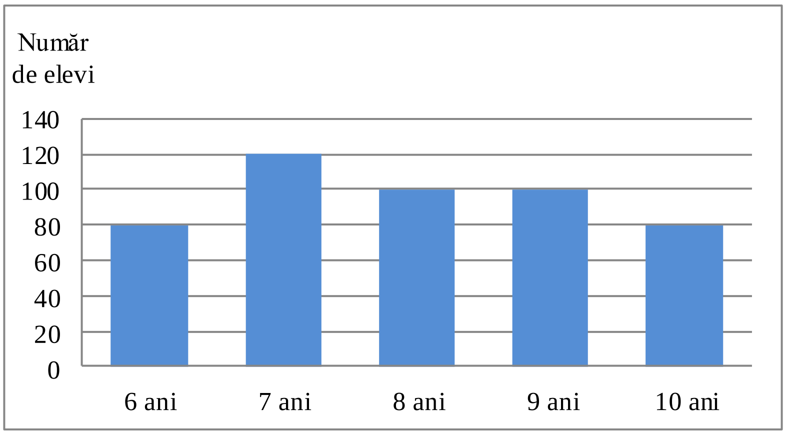



*Figura 1*

**5p** **6.** În diagrama de mai jos este prezentată repartiţia după vârstă a elevilor unui club sportiv.




Conform informaţiilor din diagramă, numărul elevilor acestui club sportiv care au vârsta de cel mult 8 ani este egal cu … .

**SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)**

**5p** **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un triunghi echilateral $ABC$ .

**5p** **2.** Știind că $a-\frac{1}{a}=3$, unde $a$ este număr real nenul, arătați că $a^2+\frac{1}{a^2}=11$ .

**5p** **3.** Un test conține $30$ de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă $5$ puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad $2$ puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Alina, care a răspuns la toate cele $30$ de întrebări, a obținut $122$ de puncte. Determinați numărul de întrebări din test la care Alina a răspuns corect.

**4.** Se consideră numerele reale $a = 3 + 2\sqrt{2} + \left|2\sqrt{2} - 3\right|$ și $b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)$.

5p **a)** Arătați că $a = 6$.

5p **b)** Calculați partea întreagă a numărului $N = \sqrt{a+b}$.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 - (x-3)(x+7) - 2(x-2)^2$, unde $x$ este număr real. Determinați numărul real $a$ pentru care $E(a)$ are cea mai mică valoare posibilă.

**SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)**

**1.** În *Figura 2* este reprezentat un trapez isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 20$ cm, $AD = 10$ cm și $CD = 10$ cm și un pătrat $ADMN$.

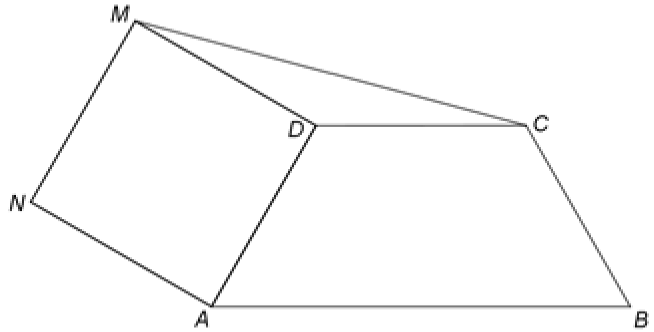



*Figura 2*

5p **a)** Arătați că perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu $50\text{cm}$.

5p **b)** Calculați măsura unghiului $DCM$.

5p **c)** Demonstrați că punctele $B$, $D$ și $M$ sunt coliniare.

**2.** În *Figura 3* este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu latura de $8\text{cm}$ și $MO \perp (ABC)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$, cu $MO = 4\sqrt{6}\,\text{cm}$.

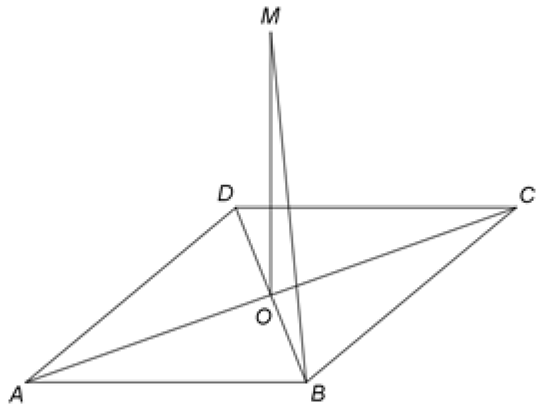



*Figura 3*

5p **a)** Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu $64\text{cm}^2$.

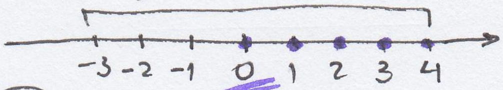
5p **b)** Determinați măsura unghiului dintre dreapta $MB$ și planul $(ABC)$.

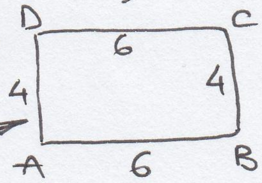
5p **c)** Știind că punctul $N$ este proiecția punctului $O$ pe planul $(MBC)$, demonstrați că $N$ este ortocentrul triunghiului $MBC$.

TESTUL 12 : REZOLVARE

SUBIECTUL I : 1) $8 \cdot 6 - 6 : 2 = 48 - 3 = 45$;

2) 8 cărți ---- 40 lei $\Rightarrow$ 1 carte --- $40 : 8 = 5$ (lei) $\Rightarrow$ 2 cărți --- $2 \cdot 5 = 10$ (lei)

3.)  Numărul cerut este 0.



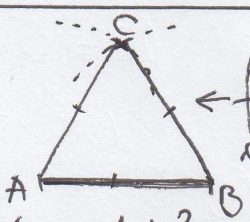
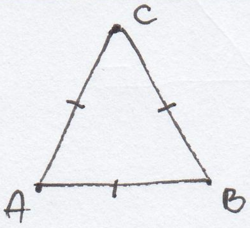
4.) $P_{ABCD} = 2(L + l) = 2 \cdot (6 + 4) = 2 \cdot 10 = 20$ (cm)

5) AD și BB′ : necoplanare, $\left.\begin{array}{l} BB' \perp (ABC) \\ AD \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow BB' \perp AD \Rightarrow m(\widehat{BB'; AD}) = 90°$.

$\left( \text{Sau } \left.\begin{array}{l} AD; BB' : \text{necoplanare} \\ AD \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{AD; BB'}) = m(\widehat{BC; BB'}) = m(\widehat{B'BC}) = 90° \right)$

6.) „Cel mult 8 ani" înseamnă 6 ani, 7 ani și 8 ani.
Avem 80 elevi de 6 ani; 120 elevi de 7 ani și 100 elevi de 8 ani, deci $80 + 120 + 100 = 300$ (elevi) cu vârsta de cel mult 8 ani.

---

SUBIECTUL al II-lea: 1)  ← folosiți compasul! $\Rightarrow$ 

2) $a - \frac{1}{a} = 3$ și atunci $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 3^2 = 9$.

Dar $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = 9 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 + 2 = 11$, q.e.d.

3) Notăm cu x nr. întrebărilor la care a răspuns corect $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la $30 - x$ a răspuns greșit.
Pentru răspunsurile corecte primește $5x$ puncte.
Pentru un răspuns greșit pierde $5 + 2 = 7$ puncte (e clar că cele 5 sunt cele care nu le primește, iar cele 2 sunt cele care i se scad). Deci pierde $(30 - x) \cdot 7$ puncte.
Dacă ar fi rezolvat toate problemele corect ar fi obținut $5 \cdot 30 = 150$ puncte.
Diferența $150 - 122 = 28$ (puncte) e din cauză că nu a rezolvat $28 : 7 = 4$ probleme. Deci a rezolvat corect $30 - 4 = 26$ probleme.
R: A răspuns corect la 26 întrebări.

Obs: Ecuația problemei: $5x - 2(30 - x) = 122 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x - 60 + 2x = 122 \Leftrightarrow 7x = 182 \Leftrightarrow x = 182 : 7 \Leftrightarrow x = 26$

4) a) $a = 3 + 2\sqrt{2} + |\underbrace{2\sqrt{2} - 3}_{<0}| =$

$= 3 + \cancel{2\sqrt{2}} + 3 - \cancel{2\sqrt{2}} = 6$, deci $a = 6$

$2\sqrt{2} < 3 \;|^{(\cdot)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 < 9$

$|2\sqrt{2} - 3| = -(2\sqrt{2} - 3) =$

$= 3 - 2\sqrt{2}$

b) $b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right) =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{2}\right) =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{3}}} - \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\sqrt{3}\cancel{\sqrt{4}}} - \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}\sqrt{4}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$

$N = \sqrt{a+b} = \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = \sqrt{6,25} = 2,5$

$[N] = [2,5] = 2.$

$\sqrt{6,25} = 2,5$

4

225

225

$4\underline{5} \cdot \underline{5} = 225$

---

5) $E(x) = (2x+3)^2 - (x-3)(x+7) - 2(x-2)^2 =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 + 4x - 21) - 2(x^2 - 4x + 4) =$

$= 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - 4x + 21 - 2x^2 + 8x - 8 =$

$= x^2 + 16x + 22$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$(x-3)(x+7) =$

$= x^2 + 7x - 3x - 21 =$

$= x^2 + 4x - 21$

$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$E(a) = a^2 + 16a + 22 = \underbrace{a^2 + 16a + 64} - 42 =$

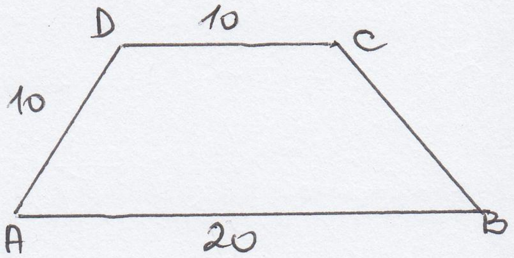
$= (a+8)^2 - 42.$

Dar $(a+8)^2 \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$ (un pătrat nu poate fi negativ)
deci $E(a) \geq -42$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Cea mai mică valoare a lui $E(a)$ este $-42$ și este atinsă când $(a+8)^2 = 0$, adică $a + 8 = 0$, deci pentru $a = -8$.

SUBIECTUL al III-lea:

a)

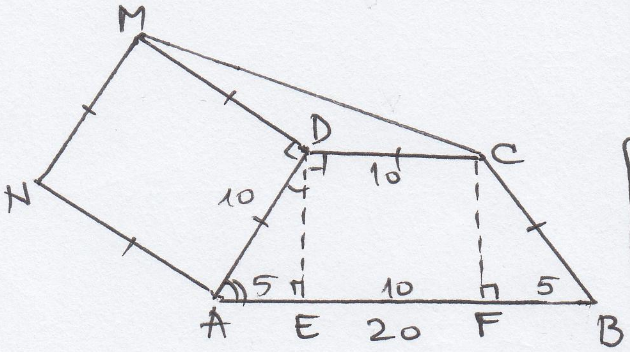



ABCD: trapez isoscel $\Rightarrow AD = BC = 10$ cm
$AB \parallel CD$

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$
(suma lungimilor laturilor)

$P_{ABCD} = 20 + 10 + 10 + 10 = 50$ (cm.)
(q.e.d.)

b)




De reținut că într-un astfel de trapez isoscel: în care baza mică este congruentă cu laturile neparalele unghiurile de la bază au $60°$. (demonstrați!)

Ducem înălțimile $DE \perp AB$; $CF \perp AB$ și avem DEFC: dreptunghi $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD = EF = 10$ cm.
ABCD: trapez isoscel $\Rightarrow AE = FB$ (pt. că $\Delta DEA \equiv \Delta CFB$ (C.I.))

$$AE = FB = \frac{AB - CD}{2} = \frac{20-10}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm)}.$$

$$\cos \widehat{DAE} = \frac{AE}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{DAE}) = 60°$$

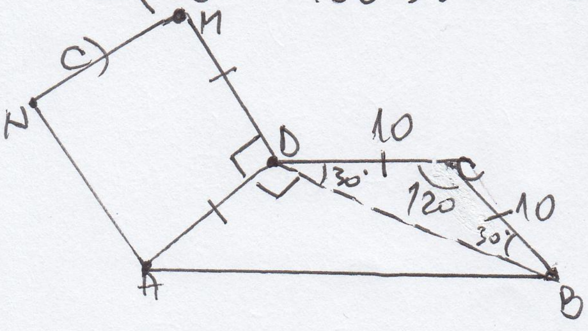
Atunci $m(\widehat{ADE}) = 90° - 60° = 30°$ (în $\Delta EAD$ dreptunghic).

În jurul punctului D se formează unghiurile pentru care avem: $m(\widehat{ADE}) + m(\widehat{EDC}) + m(\widehat{CDM}) + m(\widehat{MDA}) = 360°$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30° + 90° + m(\widehat{CDM}) + 90° = 360° \Rightarrow m(\widehat{CDM}) = 360° - 210° =$
$= 150°$.

$\Delta DMC$: isoscel cu $DM = DC \Rightarrow \widehat{DMC} \equiv \widehat{DCM}$ și are suma măsurilor unghiurilor de $180°$. Deci $m(\widehat{DCM}) = 180° - m(\widehat{CDM}) : 2 =$
$= (180° - 150°) : 2 = 30° : 2 = 15°$. Deci $m(\widehat{DCM}) = 15°$.

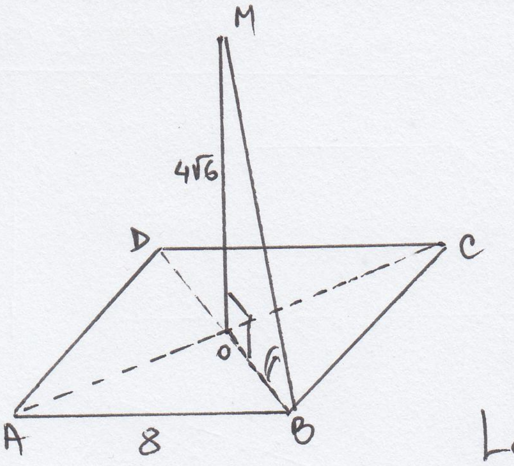
c)




OBS:
Un matematician ~~francez~~ (H. Poincaré) crede că spunea că „geometria este arta de a judeca corect ... pe figuri greșite".
(B, D, M nu le-am desenat coliniare anume pentru a ilustra ce zicea el)

$m(\widehat{DAB}) = 60°$; ABCD: trapez isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BCD}) = 120° \Rightarrow m(\widehat{CBD}) =$
$= m(\widehat{CDB}) = 30°$ ($\Delta CBD$ fiind isoscel). Atunci $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) -$
$- m(\widehat{BDC}) = 120° - 30° = 90°$. Deci $m(\widehat{MDB}) = m(\widehat{MDA}) + m(\widehat{ADB}) =$
$= 90° + 90° = 180°$, de unde rezultă că B, D și M sunt coliniare
q.e.d.

2)




a) $\mathcal{A}_{ABCD} = a^2 = AB^2 = 8^2 = 8\cdot 8 = 64\,(cm^2)$

ABCD: pătrat.

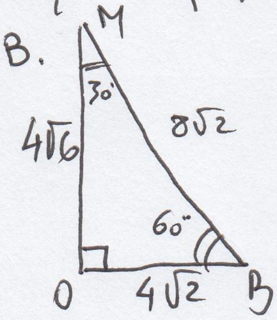
b) O dreaptă perpendiculară pe plan este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

La noi $\left.\begin{array}{l} MO \perp (ABC) \\ OB \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow MO \perp OB \Rightarrow \Delta MOB$ este dreptunghic în $\hat{O}$. (1)

Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan este egală cu măsura unghiului format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

La noi: Proiecția dreptei MB pe planul (ABC) este OB.

Deci $m[\widehat{MB,(ABC)}] = m(\widehat{MBO})$.




ABCD: pătrat $\Rightarrow BD = a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (cm).

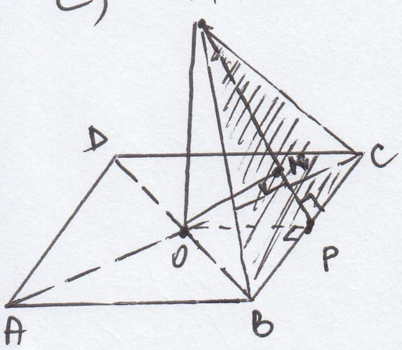
$OB = \frac{BD}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{2}$ (cm)

În $\Delta OBM$ dreptunghic în $\hat{O}$, (1), avem:

$tg\,\widehat{MBO} = \frac{MO}{OB} = \frac{\cancel{4}\sqrt{6}}{\cancel{4}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{MBO}) = 60°$. Deci $m[\widehat{MB,(ABC)}] = 60°$.

c)




Proiecția unui punct pe un plan este piciorul perpendicularei duse din punct pe plan.

Ortocentrul unui triunghi este punctul de intersecție a înălțimilor triunghiului.

$\Delta MBC$: isoscel, $MB = MC$ ($\Delta MOB \equiv \Delta MOC$ (C.C.)).

Ducem $MP \perp BC$ înălțime $\Rightarrow [MP]$: mediană $\Rightarrow BP = PC = \frac{BC}{2}$.

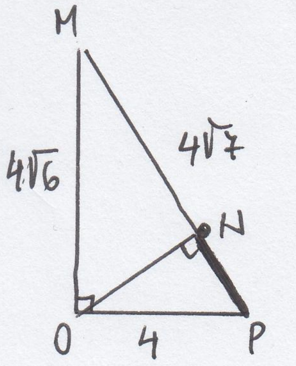
Avem $OP \perp BC$ (apotema pătratului ABCD).

$\left.\begin{array}{l} \text{Construim } ON \perp MP \text{ (în } \Delta MOP.) \\ \text{Avem } OP \perp BC \\ MP \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow ON \perp (MBC)$ conform R. a II-a a T. 3 ⊥. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ N este proiecția lui O pe (ABC).

$N \in [MP]$ (înălțime în $\Delta MBC$), rămâne de arătat că și [BN] este înălțime a aceluiași $\Delta MBC$.

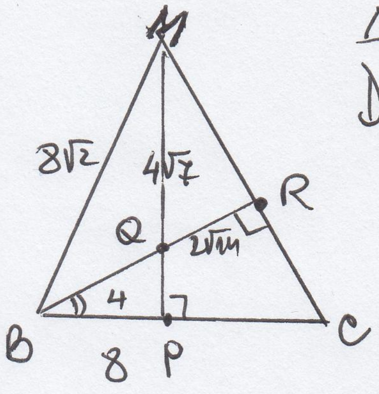
OBS. În barem este dată o demonstrație teoretică, bazată pe perpendicularitatea dreptelor și planelor în spațiu. OK

Vom da o demonstrație bazată pe calcul de lungimi de segmente.




În Δ MOP avem, cu T.P., $MP^2=(4\sqrt{6})^2+4^2=6\cdot 4^2+4^2=$
$=7\cdot 4^2 \Rightarrow MP=4\sqrt{7}$ (cm)

Cu T. catetei avem: $OP^2=PN\cdot MP \Leftrightarrow 4^2=PN\cdot 4\sqrt{7} \Rightarrow$
$\Rightarrow PN=\frac{4^2}{4\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$ (cm). (2)




$\Delta MBC$: isoscel, $MB=MC$; $MP$: înălțime și mediană.
Ducem înălțimea $BR\perp MC$ și notăm cu $Q$ intersecția înălțimilor ($MP\cap BR=\{Q\}$), deci $Q$ este ortocentrul $\Delta MBC$.
~~Vom arăta că N=Q~~ arătând că $PN=PQ$ și atunci $N$ este, întradevăr, ortocentrul $\Delta MBC$.

Cu T.P. în $\Delta MPB \Rightarrow MB^2=PM^2+PB^2=(4\sqrt{7})^2+4^2=7\cdot 4^2+4^2=8\cdot 4^2$
$MB=\sqrt{8\cdot 4^2}=4\sqrt{8}=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ (cm).
În orice triunghi produsul dintre latură și înălțimea corespunzătoare ei este constant (este $2\cdot \mathcal{A}_\Delta$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow BC\cdot MP=MC\cdot BR \Leftrightarrow 8\cdot 4\sqrt{7}=8\sqrt{2}\cdot BR \Rightarrow BR=\frac{\cancel{8}\cdot 4\sqrt{7}}{\cancel{8}\sqrt{2}}=$
$=\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{14}}{2}=2\sqrt{14}$ (cm)

$\Delta BPQ \sim \Delta BRC$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{BP}{BR}=\frac{PQ}{RC} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{4}{2\sqrt{14}}=\frac{PQ}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$

În $\Delta RBC$ cu T.P.:
$RC^2=BC^2-BR^2=$
$=8^2-(2\sqrt{14})^2=64-4\cdot 14=$
$=64-56=8 \Rightarrow RC=\sqrt{8}=$
$=2\sqrt{2}$ (cm)

$\Rightarrow PQ=\frac{4\cdot \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{14}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$ (cm). (3)

Din (2) și (3) $\Rightarrow PN=PQ=\frac{4\sqrt{7}}{7}$ cm, deci $N=Q$.
Prin urmare $N$ este ortocentrul $\Delta MBC$, (q.e.d.)
(OBS.: Uneori e mai ușoară această abordare, deși presupune să nu greșești la calcule, evident.)

# EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
## Matematică
## BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

**Test 12**

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I**

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

**SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea**

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | 45 | **5p** |
| **2.** | 10 | **5p** |
| **3.** | 0 | **5p** |
| **4.** | 20 | **5p** |
| **5.** | 90 | **5p** |
| **6.** | 300 | **5p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | Desenează triunghiul echilateral | **4p** |
| | Notează triunghiul echilateral $ABC$ | **1p** |
| **2.** | $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=9 \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=9$ | **3p** |
| | $a^2+\frac{1}{a^2}=9+2=11$ | **2p** |
| **3.** | $5n-2(30-n)=122$, unde $n$ este numărul de întrebări din test la care Alina a răspuns corect | **3p** |
| | $7n=182 \Leftrightarrow n=26$ | **2p** |
| **4.** | **a)** $a=3+2\sqrt{2}-\left(2\sqrt{2}-3\right)=$ | **3p** |
| | $=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3=6$ | **2p** |
| | **b)** $b=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ | **3p** |
| | $N=\sqrt{6+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=2{,}5 \Rightarrow$ partea întreagă a numărului $N$ este 2 | **2p** |
| **5.** | $E(x)=4x^2+12x+9-\left(x^2+7x-3x-21\right)-2\left(x^2-4x+4\right)=x^2+16x+22$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |
| | $E(a)=a^2+16a+64-42=(a+8)^2-42$, deci $E(a)$ are cea mai mică valoare posibilă dacă $a+8=0$, deci $a=-8$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow BC=AD$ | **2p** |
| | $P_{ABCD}=AB+BC+CD+DA=50\text{cm}$ | **3p** |
| | **b)** $AE=\frac{AB-CD}{2}=5\text{cm}$, unde $DE\perp AB$, $E\in AB$, deci $\Delta ADE$ dreptunghic cu $AE=\frac{AD}{2}$, deci $m(\sphericalangle ADE)=30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ADC)=120^\circ$ | **2p** |
| | $m(\sphericalangle MDC)=360^\circ-90^\circ-120^\circ=150^\circ$ și $DM=DC$, deci $m(\sphericalangle DCM)=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| | c) $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$, deci $m(\sphericalangle BCD)=120°$ și, cum $BC=CD$, obținem $m(\sphericalangle BDC)=30°$ | 3p |
| | $m(\sphericalangle MDB)=m(\sphericalangle MDC)+m(\sphericalangle CDB)=180°$, deci punctele $B$, $D$ și $M$ sunt coliniare | 2p |
| 2. | a) $\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=$ | 2p |
| | $=8^2=64\text{cm}^2$ | 3p |
| | b) $MO\perp(ABC)\Rightarrow m(\sphericalangle(MB,(ABC)))=m(\sphericalangle(MB,OB))=m(\sphericalangle MBO)$ | 2p |
| | $\Delta MOB$ dreptunghic în $O\Rightarrow \text{tg}(\sphericalangle MBO)=\frac{MO}{BO}=\frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}=\sqrt{3}$, deci $m(\sphericalangle MBO)=60°$ | 3p |
| | c) $ON\perp(MBC)\Rightarrow ON\perp BC$, $MO\perp BC$ și cum $ON\cap MO=\{O\}\Rightarrow BC\perp(MON)$, de unde $BC\perp MN\Rightarrow MN$ este înălțime în $\Delta MBC$ | 2p |
| | $BO\perp OC$, $BO\perp MO$ și $OC\cap MO=\{O\}\Rightarrow BO\perp(MOC)\Rightarrow BO\perp MC$ | 1p |
| | $ON\perp(MBC)\Rightarrow ON\perp MC$, $BO\perp MC$ și cum $ON\cap BO=\{O\}\Rightarrow MC\perp(BON)$, de unde $MC\perp BN\Rightarrow BN$ este înălțime în $\Delta MBC$, deci $N$ este ortocentrul $\Delta MBC$ | 2p |