

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 17

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $28:4-2$ este egal cu
- 5p 2. Dacă $\frac{a+6}{6} = \frac{4}{3}$, atunci a este egal cu
- 5p 3. Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-2,10]$ este egal cu
- 5p 4. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 24 cm. Lungimea unei laturi a acestui triunghi este egală cu ... cm.
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Unghiul dreptelor AD' și BC are măsura de ...°.

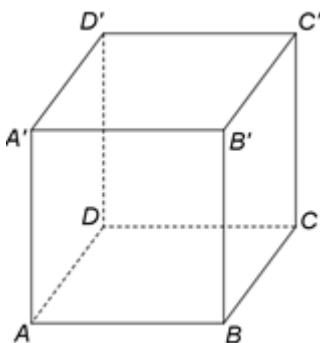


Figura 1

- 5p 6. În tabelul de mai jos este dată o dependență funcțională.

x	-2	0	m
$y = x + 2$	0	2	5

Conform informațiilor din tabel, numărul real m este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un paralelogram $ABCD$.
- 5p 2. Arătați că, pentru orice număr natural n , numărul $a = 4^{n+2} + 2^{2n} - 2^{2n+3}$ este pătratul unui număr natural.
- 5p 3. Bianca a plecat în excursie cu o sumă de bani. A plătit 40% din sumă pentru cazare și trei cincimi din rest pentru biletele la obiectivele turistice. Știind că i-au rămas 96 de lei, determinați suma de bani cu care a plecat Bianca în excursie.
4. Se consideră numerele reale $x = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 \cdot 4^2}$ și $y = (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- 5p a) Arătați că $x = 60$.
- 5p b) Determinați numărul real z , știind că media aritmetică a numerelor x , y și z este egală cu 30.
- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (4x-5)^2 - 2(8x^2 - 30x + 25) + (2x-5)^2$, unde x este număr real. Arătați că $E(-x) = E(x)$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $AD = 6$ cm. Punctele M , N , P și Q sunt situate pe laturile AB , BC , CD și, respectiv DA , astfel încât $BM = PD$ și $AQ = NC$, iar O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD .

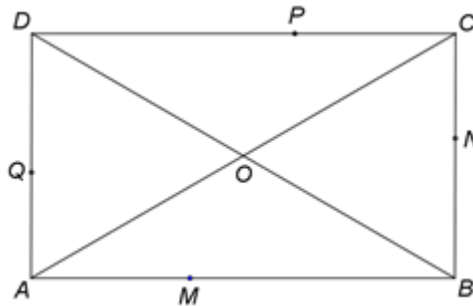


Figura 2

- 5p a) Arătați că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu $36\sqrt{3}$ cm².
- 5p b) Demonstrați că triunghiul AOD este echilateral.
- 5p c) Demonstrați că dreptele MP , NQ și BD sunt concurente.
2. În *Figura 3* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 8$ cm. Punctul O este intersecția dreptelor BC' și $B'C$.

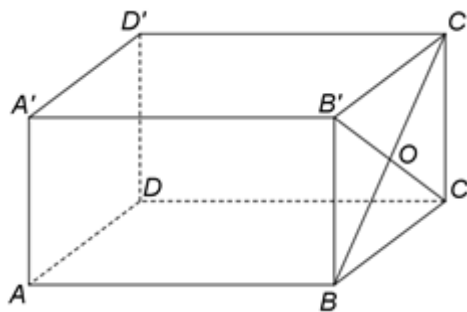


Figura 3

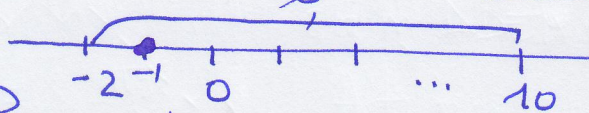
- 5p a) Arătați că perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu 36 cm.
- 5p b) Calculați distanța de la punctul O la dreapta AA' .
- 5p c) Demonstrați că dreapta $C'M$ este paralelă cu planul $(AA'O)$, unde M este mijlocul segmentului $A'D'$.

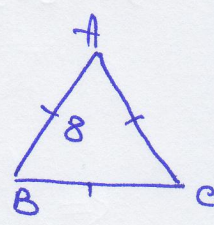
TEST 17: - REZOLVARE-MODEL

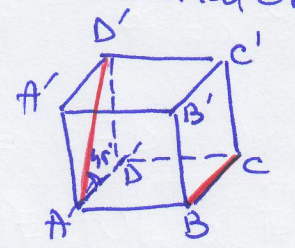
SUBIECTUL I: 1) $28:4 - 2 = 7 - 2 = 5$

2) $\frac{a+6}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{a+6}{6} = \frac{8}{6} \Leftrightarrow a+6=8 \Leftrightarrow a=8-6=2$

Sau $a+6 = \frac{6 \cdot 4}{3} \Leftrightarrow a+6=8$ etc.

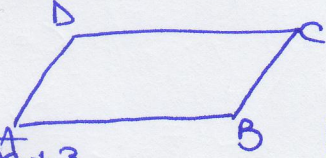
3)  Nr. cerut este -1 .

4) $P_{\Delta \text{echilateral}} = 3 \cdot l = 24 \Rightarrow l = 24:3 = 8 \text{ (cm.)}$ 

5)  $AD' \cap BC$: necoplanare
 $AD \parallel BC \Rightarrow m(\widehat{AD'; BC}) = m(\widehat{AD'; AD}) = m(\widehat{D'AD}) = 45^\circ$

6) $y = x+2$; $y = m+2 = 5 \Rightarrow m = 5-2 = 3$

SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $n \in \mathbb{N}$. $a = 4^{n+2} + 2^{2n} - 2^{2n+3} =$  $\left. \begin{aligned} &= (2^2)^{n+2} + 2^{2n} - 2^{2n+3} = \\ &= 2^{2n+4} + 2^{2n} - 2^{2n+3} = \frac{2^{2n}}{1} \cdot 2^4 + \frac{2^{2n}}{1} - \frac{2^{2n}}{1} \cdot 2^3 = \\ &= 2^{2n} (2^4 + 1 - 2^3) = 2^{2n} (16 + 1 - 8) = 2^{2n} \cdot 9 = \\ &= 2^{2n} \cdot 3^2 = (2^n)^2 \cdot 3^2 = (2^n \cdot 3)^2. \text{ Deci } a = (2^n \cdot 3)^2 \text{ este } \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &4 = 2^2 \\ &(2^2)^{n+2} = 2^{2(n+2)} \end{aligned}$
 pătratul unui număr natural (anume al lui $2^n \cdot 3$), g.e.d.

3.) $\frac{3}{5}$ din rest a plătit $\Rightarrow$ i-au mai rămas $\frac{2}{5}$ din rest, anume 96 lei. Deci $\frac{2}{5} \cdot x = 96 \Rightarrow x = 96 : \frac{2}{5} = 96 \cdot \frac{5}{2} = 48 \cdot 5 = 240$ lei.

40% a plătit pt. cazare $\Rightarrow$ i-au rămas 60% din sumă.
 $60\% \cdot x = 240 \Leftrightarrow x = 240 : \frac{60}{100} = 240 \cdot \frac{100}{60} = 400$ (lei)

R: Suma de bani cu care Bianca a plecat în excursie e 400 lei.

4.) a) $x = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} \cdot 3 \cdot 4 = \sqrt{25} \cdot 3 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$. Deci $x=60$, g.e.d.

b) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$; $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

$$y = (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3. \text{ Deci } y = 3.$$

$$m_a(x; y; z) = \frac{x+y+z}{3} = 30 \Rightarrow x+y+z = 3 \cdot 30 = 90.$$

Avem $60 + 3 + z = 90 \Rightarrow z = 90 - 60 - 3 = 27$.
Deci $z = 27$.

5) $E(x) = (4x-5)^2 - 2(8x^2 - 30x + 25) + (2x-5)^2, x \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} (4x-5)^2 = 16x^2 - 40x + 25 \\ (2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25 \end{cases}$$

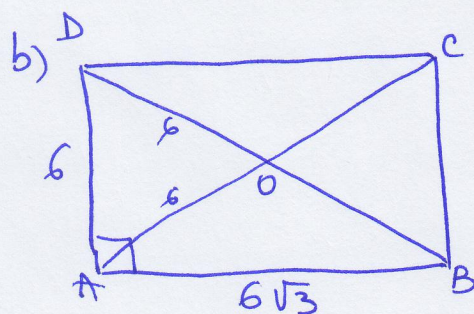
$$E(x) = \cancel{16x^2} - 40x + 25 - \cancel{16x^2} + 60x - 50 + 4x^2 - 20x + 25 = 4x^2. \text{ Deci } E(x) = 4x^2 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $a \in \mathbb{R}$ avem $E(a) = 4a^2$

$$\left. \begin{aligned} E(-a) &= 4(-a)^2 = 4a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E(a) = E(-a) \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

SUBIECTUL al III-lea:

1) a) $A_{\square} = L \cdot l; A_{ABCD} = AB \cdot AD = 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ g.f.d.}$

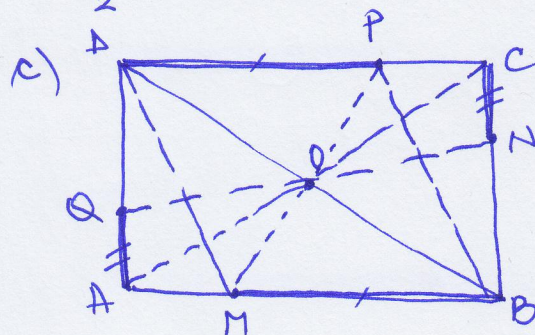


T.P. în $\triangle ABD$:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 3 \cdot 6^2 + 6^2 = 4 \cdot 6^2$$

$$BD = \sqrt{4 \cdot 6^2} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm).}$$

Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente și se înjumătățesc. Deci $BD = AC = 12 \text{ cm}$, iar $AO = OD = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$. Avem $OA = OD = AD = 6 \text{ cm} \Rightarrow \triangle AOD$: echilateral, g.f.d.



① O: mijlocul lui $[BD]$; $\{O\} = AC \cap BD$

$$\left. \begin{aligned} BM \parallel PD \\ BM = PD \end{aligned} \right| \Rightarrow MBPD: \text{paralelogram} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ diagonalele sale: $[BD]$ și $[MP]$ se înjumătățesc, deci ② $O \in [MP]$ și e chiar mijlocul lui $[MP]$.

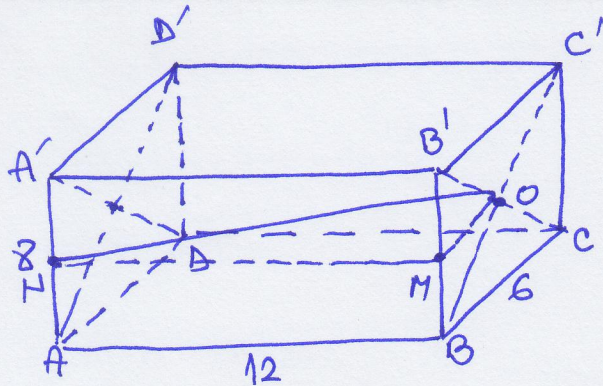
Analog, avem $AQ = NC$

$$AQ \parallel NC \mid \Rightarrow ANCQ: \text{paralelogram} \Rightarrow \text{diagonalele}$$

sale se înjumătățesc. O : mijlocul lui $[AC] \Rightarrow$ ③ O : mijlocul lui $[NQ]$

În ①, ② și ③ $\Rightarrow O \in BD \cap MP \cap NQ$, deci cele trei drepte sunt concurente.

2.)



a) ABCD: dreptunghi

$$P_{\square} = 2(L+l) = 2 \cdot (AB+BC) = 2 \cdot (12+6) = 2 \cdot 18 = 36(\text{cm})$$

Deci $P_{ABCD} = 36 \text{ cm}$, g.e.d.

b) Distanța de la un punct la o dreaptă este egală cu lungimea perpendicularei dusă din punct pe dreaptă.

Fie M: mijlocul lui $[BB']$ și N: mijlocul lui $[AA']$.OM: linie mijlocie în $\triangle B'BC \Rightarrow OM \parallel BC \perp (ABB') \Rightarrow$

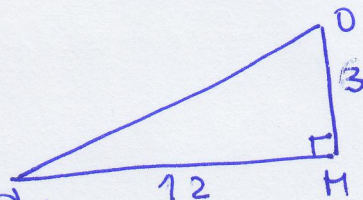
$$\Rightarrow OM \perp (ABB') \mid \Rightarrow ON \perp AA' \text{ (T. 3 } \perp \text{)}.$$

$$MN \perp AA' \mid \Rightarrow \text{deci } d(O; AA') = ON.$$

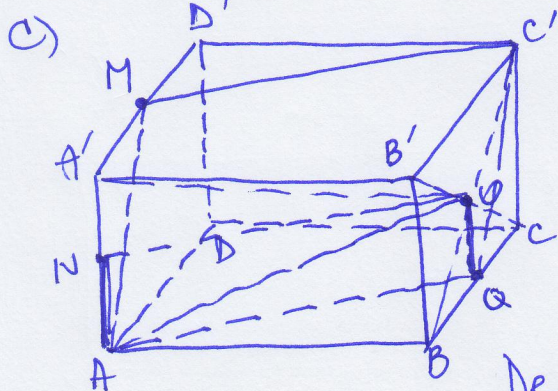
OM $\perp$ (ABB') $\mid \Rightarrow OM \perp MN$ deci $\triangle OMN$: dreptunghic.

$$MN = AB = 12 \text{ cm}; OM = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm}).$$

$$\text{Cu T. P. avem } ON^2 = OM^2 + MN^2 = 3^2 + 12^2 = 9 + 144 = 153 \Rightarrow \Rightarrow ON = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}(\text{cm}). \text{ Deci } d(O; AA') = 3\sqrt{17} \text{ cm.}$$



$$\begin{array}{r} 153 \overline{) 3} \\ 51 \overline{) 3} \\ 17 \overline{) 17} \\ \underline{1} \end{array}$$

Notăm Q: mijlocul lui $[BC]$ N: mijlocul lui $[AA']$.OQ: linie mijlocie în $\triangle BCC' \Rightarrow$

$$\Rightarrow QO = CC' \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4(\text{cm}) \text{ și } QO \parallel CC' \parallel AA'$$

$$\text{De asemenea, avem } NA = \frac{AA'}{2} = \frac{8}{2} = 4(\text{cm}) \quad \left. \vphantom{\frac{8}{2}} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AQON: \text{paralelogram} \Rightarrow \overline{ON \parallel AQ} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{AM = C'Q} \text{ pt. că } \triangle AA'M \equiv \triangle C'CQ \text{ (c.c.) } (AA' = CC'; A'M = CQ) \text{ și } \\ \underline{C'N = AQ} \text{ pt. că } \triangle C'D'M \equiv \triangle ABQ \text{ (c.c.) } (D'C' = AB; D'M = BQ) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AMC'Q: \text{paralelogram} \Rightarrow \overline{C'M \parallel AQ} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din (1) și (2)} \Rightarrow C'M \parallel ON \\ ON \subset (AA'O) \end{array} \right\} \Rightarrow C'M \parallel (AA'O), \text{ conform teoremei:}$$

"O dreaptă exterioară unui plan este paralelă cu planul dacă este paralelă cu o dreaptă din plan."

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 17

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	5	5p
2.	2	5p
3.	-1	5p
4.	8	5p
5.	45	5p
6.	3	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează paralelogramul Notează paralelogramul $ABCD$	4p 1p
2.	$a = (2^2)^{n+2} + 2^{2n} - 2^{2n+3} = 2^{2n+4} + 2^{2n} - 2^{2n+3} = 2^{2n}(2^4 + 1 - 2^3) =$ $= 2^{2n} \cdot 9 = 2^{2n} \cdot 3^2 = (2^n \cdot 3)^2$, pentru orice număr natural n	3p 2p
3.	$\frac{40}{100} \cdot x + \frac{3}{5} \cdot \left(x - \frac{40}{100} \cdot x\right) + 96 = x$, unde x este suma de bani cu care a plecat Bianca în excursie $x = 400$ de lei	3p 2p
4.	a) $x = \sqrt{9+16} \cdot 3 \cdot 4 =$ $= \sqrt{25} \cdot 12 = 60$ b) $y = (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3$ $\frac{x+y+z}{3} = 30$, deci $60 + 3 + z = 90$, de unde obținem $z = 27$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 16x^2 - 40x + 25 - 16x^2 + 60x - 50 + 4x^2 - 20x + 25 = 4x^2$, pentru orice număr real x Cum $E(-x) = 4(-x)^2 = 4x^2$, pentru orice număr real x , obținem $E(-x) = E(x)$, pentru orice număr real x	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot AD =$ $= 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ b) $\triangle ABC$ este dreptunghic în A , deci $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{108 + 36} = 12 \text{ cm}$ $ABCD$ este dreptunghi, deci $AC = BD$ și, cum $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $AO = OD = 6 \text{ cm}$, deci $AD = AO = OD \Rightarrow \triangle AOD$ este echilateral	3p 2p 2p 3p
----	---	----------------------

	c) $BM = PD$ și $BM \parallel PD \Rightarrow BPDM$ este paralelogram și, cum O este mijlocul segmentului BD, obținem $O \in MP$ $AQ = NC$ și $AQ \parallel NC \Rightarrow ANCQ$ este paralelogram și, cum O este mijlocul segmentului AC, obținem $O \in NQ$, deci dreptele MP, NQ și BD sunt concurente	2p 3p
2.	a) $ABCD$ este dreptunghi, deci $P_{ABCD} = 2(AB + BC) =$ $= 2 \cdot 18 = 36 \text{ cm}$	2p 3p
	b) $AB \perp (BCC') \Rightarrow AB \perp BO \Rightarrow AO = \sqrt{AB^2 + BO^2}$ și, cum $BC' = 10 \text{ cm}$, obținem $AO = 13 \text{ cm}$ și $A'B' \perp (BCC') \Rightarrow A'B' \perp B'O \Rightarrow A'O = \sqrt{A'B'^2 + B'O^2}$ și, cum $B'O = 5 \text{ cm} \Rightarrow A'O = 13 \text{ cm}$ $\triangle AOA'$ este isoscel $\Rightarrow ON \perp AA'$, unde N este mijlocul segmentului AA', de unde obținem $d(O, AA') = ON = \sqrt{AO^2 - AN^2} = \sqrt{169 - 16} = 3\sqrt{17} \text{ cm}$	2p 3p
	c) MN linie mijlocie în $\triangle A'AD'$, deci $MN \parallel AD'$, $MN = \frac{AD'}{2}$ și, cum $AD' \parallel BC'$, $AD' = BC'$, obținem $MN \parallel C'O$ și $MN = C'O$, deci $MNOC'$ este paralelogram $C'M \parallel ON$ și $ON \subset (AA'O)$, deci $C'M \parallel (AA'O)$	3p 2p