

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 20

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $10^2 - 100 : 2$ este egal cu
- 5p 2. Dacă $p\%$ din 50 este egal cu 10, atunci p este egal cu
- 5p 3. Dacă $A = \{6, 7, 8, 9\}$ și P este mulțimea numerelor prime, atunci mulțimea $A \cap P$ este egală cu $\{...\}$.
- 5p 4. Triunghiul dreptunghic isoscel ABC are cateta de 5 cm. Lungimea ipotenuzei BC a acestui triunghi este egală cu ... cm.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 10$ cm și $BC = 5$ cm. Perimetrul patrulaterului $A' B' C' D'$ este egal cu ... cm.

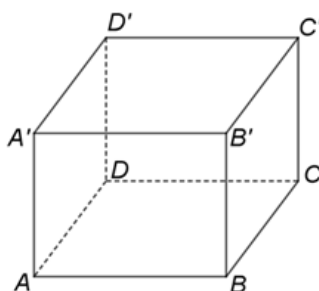
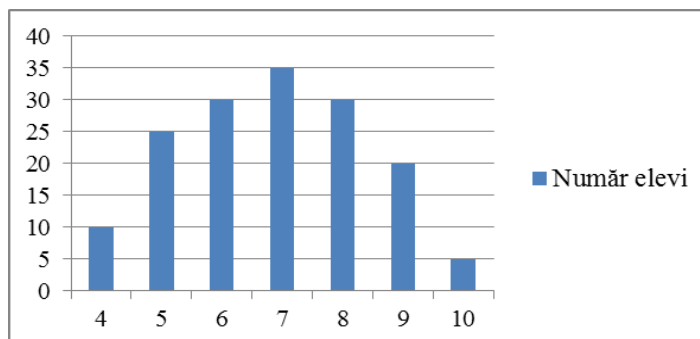


Figura 1

- 5p 6. În graficul de mai jos este prezentată repartitia elevilor claselor a VIII-a dintr-o școală, în funcție de notele obținute la teza de matematică pe semestrul I.



Conform informațiilor din grafic, numărul elevilor care au obținut nota 8 este mai mare decât numărul elevilor care au obținut nota 5 cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un pătrat $ABCD$.
- 5p 2. Determinați numerele naturale de trei cifre, de forma $\overline{3bc}$, știind că sunt divizibile cu 5 și cu 9 .
- 5p 3. Dacă mărim numărătorul fracției $\frac{2}{5}$ cu un număr natural n și micșorăm numitorul fracției cu același număr natural n , atunci fracția obținută este egală cu $2\frac{1}{2}$. Determinați numărul natural n .
4. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ și $M(m, 0)$, unde m este număr natural.
- 5p a) Reprezentați segmentul AB într-un sistem de coordonate xOy .
- 5p b) Determinați numărul natural m , știind că triunghiul ABM este isoscel de vârf B .

- 5p 5. Se consideră $E(x) = (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x)^2 - x^2$, unde x este număr real. Calculați media aritmetică a numerelor $E(-\sqrt{2})$ și $E(\sqrt{2})$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 10\text{ cm}$ și $BC = 15\text{ cm}$. Punctul M este mijlocul laturii AB , iar punctul N este situat pe latura AD astfel încât $DN = 5\text{ cm}$.

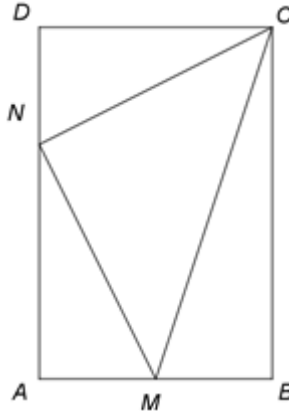


Figura 2

- 5p a) Arătați că perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu 50 cm .
5p b) Determinați aria triunghiului MNC .
5p c) Calculați măsura unghiului CMN .

2. În *Figura 3* este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 12\text{ cm}$. Punctul O este intersecția diagonalelor bazei $ABCD$.

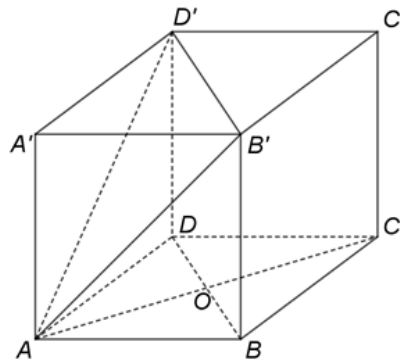


Figura 3

- 5p a) Arătați că $AC = 12\sqrt{2}\text{ cm}$.
5p b) Arătați că dreapta $C'O$ este paralelă cu planul $(AB'D')$.
5p c) Demonstrați că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul $(AB'D')$.

TEST 20: REZOLVARE: SUBIECTUL I:

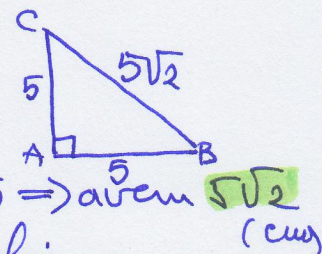
1) $10^2 - 100 : 2 = 10 \cdot 10 - 50 = 100 - 50 = 50$

2) $(p\% \text{ din } 50) = 10 \Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot 50 = 10 \Leftrightarrow p \cdot \frac{50}{100} = 10 \Leftrightarrow p = 10 : \frac{50}{100} = 10 \cdot \frac{100}{50} = 20$. Deci $p = 20$.

3) $A \cap P' = \{6; 7; 8; 9\} \cap P$, deci trebuie aflate nr. prime din A.

Numărul prim care aparține lui A este 4.

4) Ipotezuza unui triunghi dreptunghic isoscel cu cateta egală cu a este egală cu $a\sqrt{2}$; $a = 5 \Rightarrow$ avem $5\sqrt{2}$ (cm)



5) Patrulaterul $A'B'C'D'$ este un dreptunghi

în care $A'B' = AB = 10$ cm și $B'C' = BC = 5$ cm.

$$P_{A'B'C'D'} = 2L + 2l = 2 \cdot A'B' + 2 \cdot B'C' = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 20 + 10 =$$

6) Nota 8 au obținut-o 30 elevi. Nota 5 au obținut 25 elevi. $= 30$ cm

$30 - 25 = 5$. Deci nr. elevilor cu nota 8 este cu 5 mai mare decât nr. elevilor care au obținut 5.

SUBIECTUL al II-lea:

1)

2) $\overline{3bc} : 5 \Rightarrow c \in \{0; 5\}$

Avem două cazuri: $\overline{3b0} : 9$, deci $(3+b+0) : 9 \Rightarrow b = 6$ și
o soluție este $\overline{360}$.
 b : cifră

$\overline{3b5} : 9$, deci $(3+b+5) : 9 \Rightarrow b = 1$ și
o altă soluție este $\overline{315}$.
 b : cifră

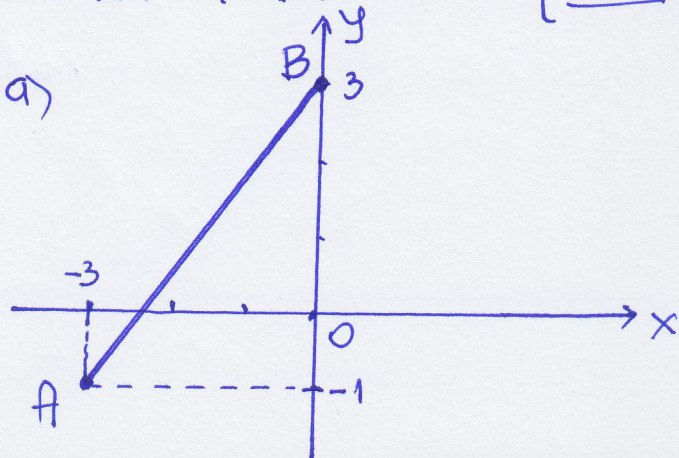
R: Numerele cerute sunt 315 și 360.

3) Avem $\frac{2+n}{5-n} = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+n}{5-n} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(2+n) = 5(5-n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4 + 2n = 25 - 5n \Leftrightarrow 2n + 5n = 25 - 4 \Leftrightarrow 7n = 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 21 : 7 \Leftrightarrow n = 3. \text{ [Obs. În barem se punctează și "ghici" rea' lui } n=3.]$$

4) a)



b) Notăm cu C punctul de coordonate $(0; -1)$

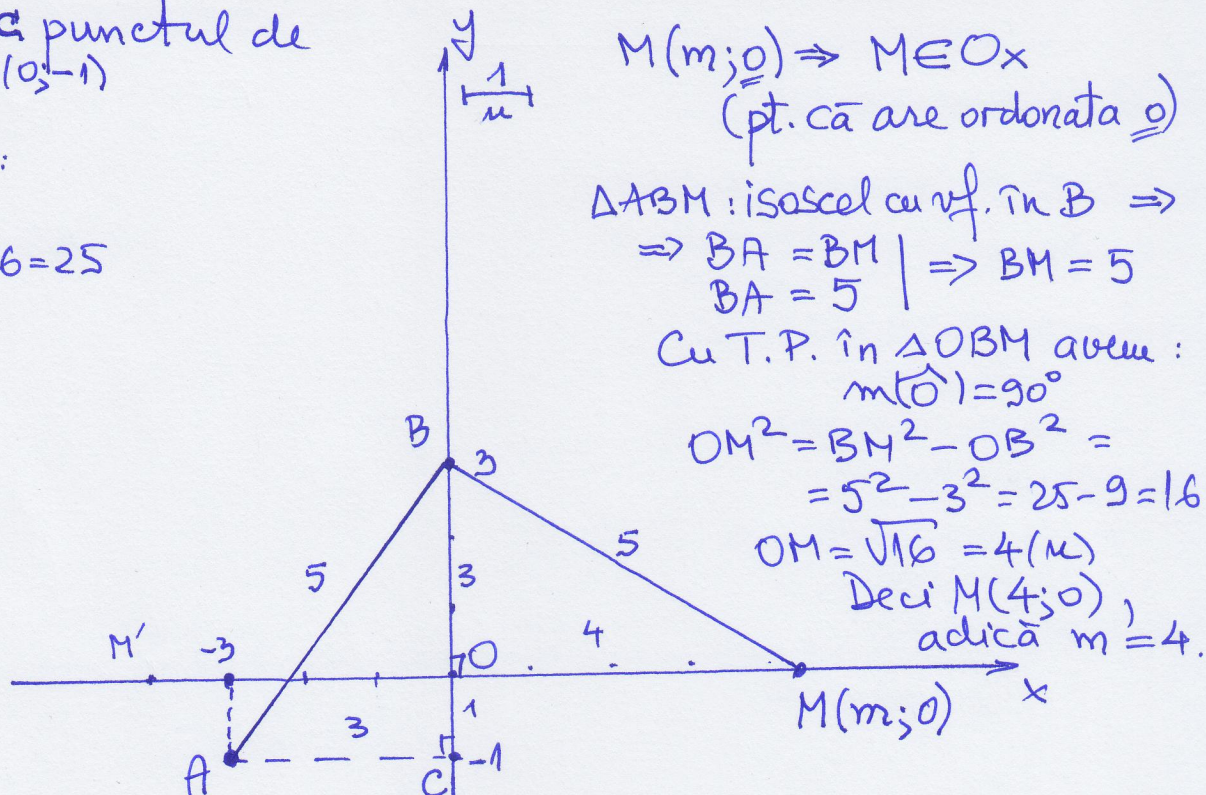
T.P. în $\triangle ABC$

Cu $m(\hat{C}) = 90^\circ$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$AB = \sqrt{25} = 5 \text{ (u.)}$$



$$M(m; 0) \Rightarrow M \in O_x$$

(pt. că are ordonata 0)

$\triangle ABM$: isoscel cu vrf. în B $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BA = BM \mid \Rightarrow BM = 5$$

$$BA = 5$$

Cu T.P. în $\triangle OBM$ avem:

$$m(\hat{O}) = 90^\circ$$

$$OM^2 = BM^2 - OB^2 =$$

$$= 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$OM = \sqrt{16} = 4 \text{ (u.)}$$

$$\text{Deci } M(4; 0),$$

adică $m = 4$.

[Obs: Cerința $m \in \mathbb{N}$ este foarte importantă. Dacă s-ar fi permis $m \in \mathbb{Z}$ (sau orice număr) am mai fi avut o soluție: $M'(-4; 0)$ pentru că și $BM' = BA = 5$ și aveam 2 soluții: $m = 4$ sau $m = -4$.

$$5) E(x) = (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x)^2 - x^2, x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} E(x) &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 - \\ &\quad - (x^4 - 2x^3 + x^2) - x^2 = \\ &= \cancel{x^4} - 2\cancel{x^3} + 3x^2 - 2x + 1 - \cancel{x^4} + 2\cancel{x^3} - x^2 - x^2 = \\ &= x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \end{aligned}$$

Deci $E(x) = (x - 1)^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2} - 1)^2 = (-\sqrt{2})^2 - 2(-\sqrt{2}) \cdot 1 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = \\ &= 3 + 2\sqrt{2}. \text{ sau astfel: } (-\sqrt{2} - 1)^2 = [-(\sqrt{2} + 1)]^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 = \dots \end{aligned}$$

$$E(\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

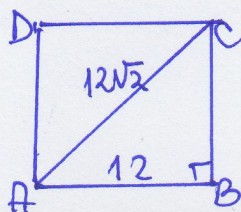
$$m_a = \frac{E(-\sqrt{2}) + E(\sqrt{2})}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

SUBIECTUL al III-lea:

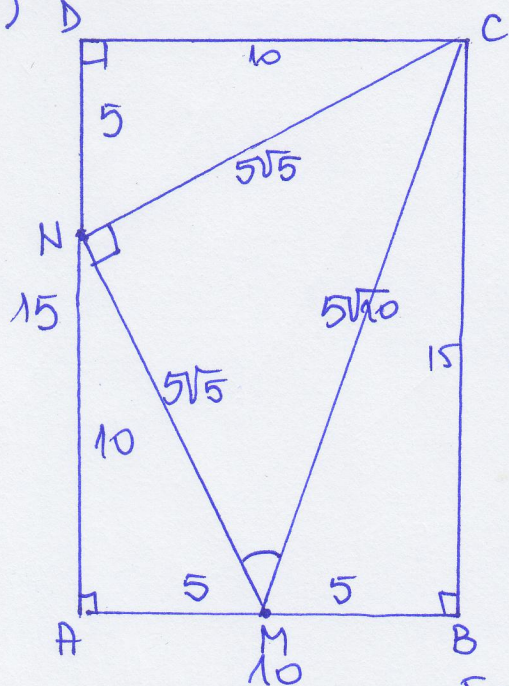
2) a) ABCD: pătrat

$$AB = 12 \text{ cm.}$$

$$AC = a\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$



III. 1)



a) Patrulaterul ABCD: dreptunghi $\Rightarrow$
 $\Rightarrow P_{ABCD} = 2L + 2l = 2AB + 2AD =$
 $= 2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 = 20 + 30 = 50 \text{ (cm)},$
 (g.e.d.)

b) $A_{\Delta MNC} = A_{ABCD} - (A_{\Delta AMN} + A_{\Delta BMC} +$
 $+ A_{\Delta DNC}) \quad (1)$

$AD = 15 \text{ cm}; DN = 5 \text{ cm} \Rightarrow AN = AD - ND =$
 $= 15 - 5 = 10 \text{ (cm)}. AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm)}$

$$A_{\Delta AMN} = \frac{AM \cdot AN}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{\Delta BMC} = \frac{BM \cdot BC}{2} = \frac{5 \cdot 15}{2} = 37,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$A_{\Delta DNC} = \frac{DN \cdot DC}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\begin{array}{r} 150 - \\ 87,5 \\ \hline 62,5 \end{array}$$

$$A_{ABCD} = L \cdot l = 10 \cdot 15 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Conform (1) avem $A_{\Delta MNC} = 150 - (25 + 37,5 + 25) = 150 - 87,5 =$
 $= 62,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$

c) Calculăm cu T. Pitagora lungimile laturilor ΔNMC :

$$\text{În } \Delta DNC, m(\widehat{D}) = 90^\circ, \text{ T.P.} \Rightarrow CN^2 = DN^2 + DC^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 =$$

 $= 125 \Rightarrow CN = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ (cm)}$

$$\text{În } \Delta AMN, m(\widehat{A}) = 90^\circ, \text{ T.P.} \Rightarrow MN^2 = AM^2 + AN^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 =$$

 $= 125 \Rightarrow MN = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ (cm)}$

$$\text{În } \Delta BMC, m(\widehat{B}) = 90^\circ, \text{ T.P.} \Rightarrow MC^2 = BM^2 + BC^2 = 5^2 + 15^2 = 25 + 225 =$$

 $= 250 \Rightarrow MC = \sqrt{250} = 5\sqrt{10} \text{ (cm)}$

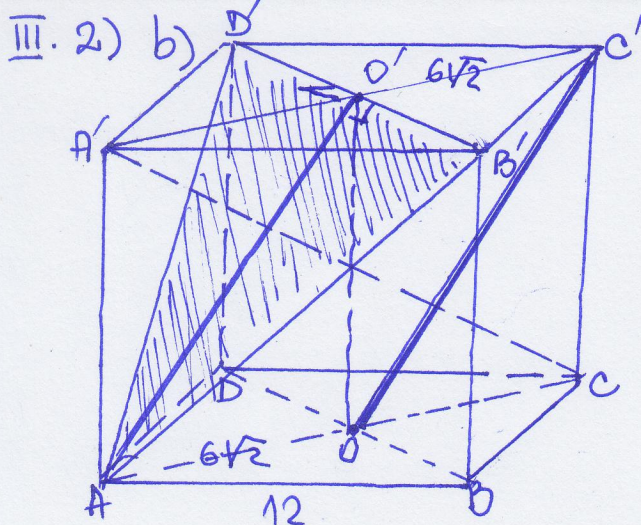
Din calcule observăm că

$$(5\sqrt{10})^2 = (5\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 250 = 125 + 125 \text{ (A)}, \text{ deci}$$

$NM^2 + NC^2 = MC^2$, deci ΔMNC este dreptunghic în $\widehat{H}$.

$NM = NC = 5\sqrt{5} \text{ cm}$, deci ΔNMC : dreptunghic isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{CMH}) = 45^\circ$, g.e.d.



AA'C'C : dreptunghi (secțiunea diagonală a cubului) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow O'C' \parallel AO. \quad (1)$$

$\Rightarrow$ $OC' = \frac{AC'}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$
 $OA = \frac{AC}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}(\text{cm}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow O'C' = AO \quad (2)$$

Din ① și ② $\Rightarrow$ $AOC'O'$: paralelogram $\Rightarrow C'O \parallel AO'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow c'o \parallel (AB'D')$ (O dreaptă exterioră unui plan este paralelă
2. e. d. Cu planul dacă e paralelă cu o dreaptă
din plan.)

c) Avem $\underline{A'O' \perp B'D'}$ (diag. patr. $A'B'C'D'$).

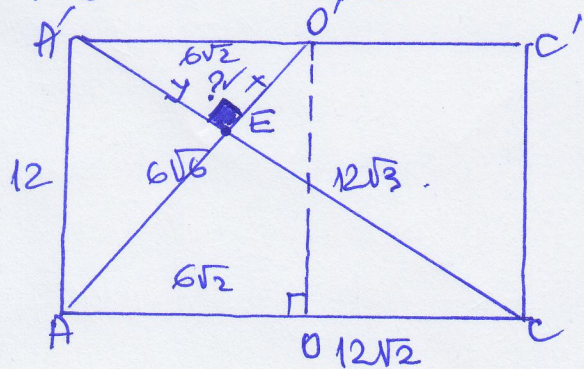
$\triangle AB'D'$: isoscel ($AB' = AD' = 12\sqrt{2} \text{ cm.}$) $\Rightarrow AO' \perp B'D'$ (2)

Ao: mediana

Construim AC diagonală cubului și vom arăta că
 $AC \perp AO'$

Din (1'); (2') și (3') $\Rightarrow AC \perp (AB'D')$ conform reciproci ^(3') a 1-a a Teoremei celor 3 perpendiculare.

Demonstram (3):



$$AC = 12\sqrt{2} \text{ cm} ; AA' = 12 \text{ cm}$$

Cu T.P. in $\triangle AA'C$, $m(\hat{A}) = 90^\circ$ given

$$\begin{aligned} AC^2 &= AF^2 + FC^2 = 12^2 + (12\sqrt{2})^2 = 12^2 + 2 \cdot 12^2 \\ &= 3 \cdot 12^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3 \cdot 12^2} = 12\sqrt{3} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$AO = \frac{Ac}{2} = 6\sqrt{2}(\text{cm}) ; OO' = AA' = 12\text{cm}$$

Сл. 7. Р. на $\Delta OAO'$ асим.

$$AO'^2 = OA^2 + OO'^2 = (6\sqrt{2})^2 + 12^2 = 72 + 144 = 216$$

$$AO' = \sqrt{216} = \sqrt{36 \cdot 6} = 6\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$AO' = \sqrt{216} = \sqrt{36 \cdot 6} = 6\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

Notam, cu $\{E\} = AO' \cap AC$. $\triangle EAO' \sim \triangle ECA$ (T. f. v). $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{EO'}{AE} = \frac{EA'}{EC} = \frac{O'A'}{AC} = \frac{6\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{6}-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}_{cm.}$$

$$\frac{y}{12\sqrt{3}-y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y = 12\sqrt{3}-y \Leftrightarrow 3y = 12\sqrt{3} \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \text{ (cm.)}$$

In $\triangle EOA'$ we have $EO^2 + EA'^2 = AO'^2$ p. c. $(2\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2 = (6\sqrt{2})^2$
 $24 + 48 = 72 \text{ (A)}$

R.T. Pitagora
 $\downarrow$
 $A'E \perp EO'$
 $\Rightarrow$ deci
 $\underline{AC \perp AO'}$ (3)

$$\frac{y}{12\sqrt{3}-y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y = 12\sqrt{3} - y \Leftrightarrow 3y = 12\sqrt{3} \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \text{ (cm.)}$$

$$\text{In } \triangle EOA' \text{ avem } EO^2 + EA'^2 = AO'^2 \text{ pt. c. } (2\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow \text{dec. } \underline{AC \perp AO'} \text{ (3)}$$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	50	5p
2.	20	5p
3.	7	5p
4.	$5\sqrt{2}$	5p
5.	30	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează pătratul Notează pătratul $ABCD$	4p 1p
2.	$\overline{3bc}$ este divizibil cu 5, deci $c \in \{0,5\}$ $\overline{3b0}$ este divizibil cu 9 $\Leftrightarrow 3+b+0$ este divizibil cu 9 și, cum b este cifră, obținem $b=6$ $\overline{3b5}$ este divizibil cu 9 $\Leftrightarrow 3+b+5$ este divizibil cu 9 și, cum b este cifră, obținem $b=1$, deci numerele sunt 315 și 360	1p 2p 2p
3.	$\frac{2+n}{5-n} = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+n}{5-n} = \frac{5}{2}$ $n=3$, care convine	3p 2p
4.	a) Reprezentarea punctului A Reprezentarea punctului B Trasarea segmentului AB b) $BA = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ $\triangle ABM$ este isoscel de vârf $B \Rightarrow BA = BM$, deci $BM = 5 \Rightarrow \sqrt{(m-0)^2 + (0-3)^2} = 5$, de unde obținem $m^2 + 9 = 25$ și, cum m este număr natural, $m=4$	2p 2p 1p 2p 3p
5.	$E(x) = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - (x^4 - 2x^3 + x^2) - x^2 = x^2 - 2x + 1$, pentru orice număr real x $m_a = \frac{E(-\sqrt{2}) + E(\sqrt{2})}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2}}{2} = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $ABCD$ dreptunghi, deci $P_{ABCD} = 2(AB + BC) =$ $= 2(10 + 15) = 50 \text{ cm}$	3p 2p
	b) $\mathcal{A}_{\triangle AMN} = \frac{AM \cdot AN}{2} = 25 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{\triangle BMC} = \frac{BM \cdot BC}{2} = 37,5 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{\triangle CDN} = \frac{CD \cdot DN}{2} = 25 \text{ cm}^2$ $\mathcal{A}_{\triangle MNC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\triangle AMN} - \mathcal{A}_{\triangle BMC} - \mathcal{A}_{\triangle CDN} = 150 - 25 - 37,5 - 25 = 62,5 \text{ cm}^2$	3p 2p

	c) $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = 5\sqrt{5}\text{cm}$, $CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = 5\sqrt{5}\text{cm}$, $MC = \sqrt{BM^2 + BC^2} = 5\sqrt{10}\text{cm}$ $MN^2 + NC^2 = MC^2$, deci $\triangle MNC$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\angle CMN) = 45^\circ$	3p 2p
2.	a) AC este diagonala pătratului $ABCD$, deci $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 12\sqrt{2}\text{cm}$	3p 2p
	b) $ACC'A'$ dreptunghi, deci $AC \parallel A'C'$ și $AC = A'C'$, de unde obținem $AO \parallel O'C'$ și $AO = O'C'$, unde $\{O'\} = A'C' \cap B'D' \Rightarrow AOC'O'$ paralelogram $C'O \parallel AO'$, $AO' \subset (AB'D')$, deci $C'O \parallel (AB'D')$	3p 2p
	c) $B'D' \perp A'C'$, $B'D' \perp AA'$ și $A'C' \cap AA' = \{A'\} \Rightarrow B'D' \perp (AA'C')$ și, cum $A'C \subset (AA'C')$, obținem $B'D' \perp A'C$ $A'O' \parallel AC \Rightarrow \triangle A'MO' \sim \triangle CMA$, unde $\{M\} = A'C \cap AO' \Rightarrow \frac{A'M}{MC} = \frac{MO'}{MA} = \frac{A'O'}{CA} = \frac{1}{2}$ și, cum $A'C = 12\sqrt{3}\text{cm}$, $AO' = 6\sqrt{6}\text{cm}$, obținem $A'M = 4\sqrt{3}\text{cm}$, $AM = 4\sqrt{6}\text{cm} \Rightarrow AM^2 + MA'^2 = AA'^2$ deci $\triangle AMA'$ este dreptunghic în M $A'C \perp B'D'$, $A'C \perp AO'$ și $B'D' \cap AO' = \{O'\} \Rightarrow A'C \perp (AB'D')$	1p 3p 1p