

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 22

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $20 - (20 : 4 + 5)$ este egal cu
- 5p 2. Numărul care reprezintă 10% din 20 este egal cu
- 5p 3. Dacă $A = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$ și $\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale, atunci $A \cap \mathbb{N} = \{\dots\}$.
- 5p 4. Triunghiul echilateral ABC are $AB = 4\text{ cm}$. Perimetrul acestui triunghi este egal cu ... cm .
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Unghiul dreptelor AD' și AB' are măsura de ...°.

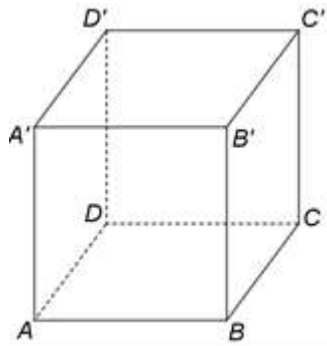


Figura 1

- 5p 6. În tabelul de mai jos este dată o dependență funcțională.

x	-1	a	1
$y = 3x - 2$	-5	-2	1

Conform informațiilor din tabel, numărul real a este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un paralelogram $ABCD$ cu $m(\sphericalangle ABC) > 90^\circ$.
- 5p 2. Numerele reale a , b și c sunt direct proporționale cu numerele 3, 7 și 11. Arătați că b este media aritmetică a numerelor a și c .
- 5p 3. Un kilogram de banane costă cât două kilograme de portocale. Un restaurant a cumpărat treizeci de kilograme de portocale și patruzeci și cinci de kilograme de banane, pentru care a plătit 360 de lei. Determinați prețul unui kilogram de portocale.
4. Se consideră numerele reale $x = (1 + \sqrt{3})^2 - 2(2 - \sqrt{5})$ și $y = (\sqrt{15} + \sqrt{75} - \sqrt{45}) \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}$.
- 5p a) Arătați că $x = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$.
- 5p b) Arătați că numărul $N = x(y - 1)$ este natural.
- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2 + (1 - x)(2x - 1) + 3x - 1$, unde x este număr real. Determinați numărul natural n pentru care numărul $E(n)$ este prim.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un triunghi dreptunghic ABC cu $AB \perp AC$, $AC = 4\text{ cm}$ și $BC = 8\text{ cm}$. Semidreapta CM , $M \in AB$ este bisectoarea unghiului ACB .

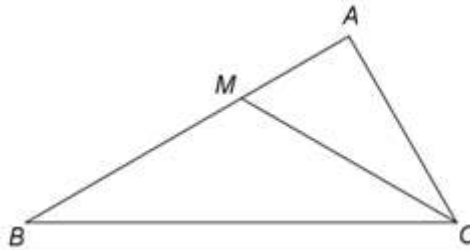


Figura 2

- 5p a) Arătați că $AB = 4\sqrt{3}\text{ cm}$.
5p b) Demonstrați că triunghiul BMC este isoscel.
5p c) Se consideră punctul N , pe latura AC , astfel încât distanța de la punctul N la dreapta AB să fie egală cu distanța de la punctul N la dreapta BC . Demonstrați că $(2 + \sqrt{3})NA = AB$.

2. În *Figura 3* este reprezentat un romb $ABCD$ cu $AC = 16\text{ cm}$ și $BD = 12\text{ cm}$. Punctul M este mijlocul laturii CD , $PM \perp (ABC)$, $PM = 4\text{ cm}$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD .

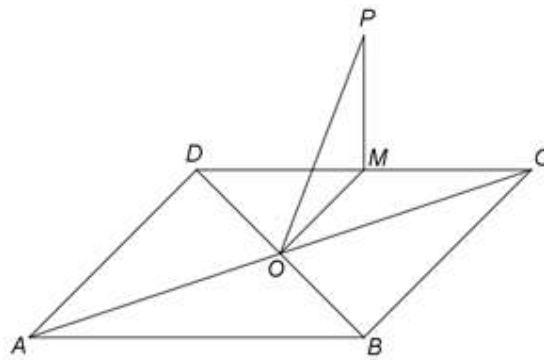


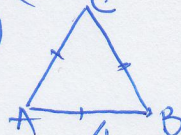
Figura 3

- 5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu 96 cm^2 .
5p b) Demonstrați că dreapta AD este paralelă cu planul (POM) .
5p c) Determinați distanța de la punctul P la dreapta AC .

TEST 22: - REZOLVARE

Subiectul I: 1) $20 - (20 : 4 + 5) = 20 - (5 + 5) = 20 - 10 = 10$;

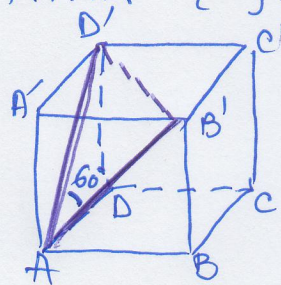
2) $(10\% \text{ din } 20) = \frac{10}{100} \cdot 20 = 2$; 3) $A = \{-1; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\}$; $A \cap \mathbb{N} = \{1\}$;

4)  $P_{\Delta e} = 3 \cdot l$; $P_{\Delta ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 4 = 12$ (cm).

5) AD și AB' : concurente $\Rightarrow m(\widehat{AD'B'}) = m(\widehat{D'AB'})$

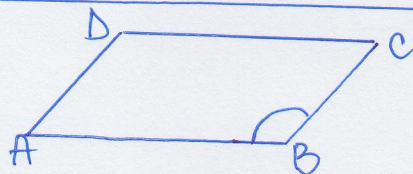
$\Delta AB'D'$: echilateral pt. că $AD' = AB' = B'D'$ (diag. fete)

Deci $m(\widehat{D'AB'}) = 60^\circ$



6) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x = a \end{cases} \Rightarrow y = 3a - 2$. Din tabel reiese că $y = 3a - 2 = -2 \Rightarrow 3a = 2 - 2 = 0 \Rightarrow a = 0$;

Subiectul al II-lea: 1)



2) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{11} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 3k \\ b = 7k \\ c = 11k \end{cases} \quad m_a(a; c) = \frac{a+c}{2} = \frac{3k+11k}{2} = \frac{14k}{2} = 7k = b$

Deci b este egal cu media aritmetică a numerelor a și c , g.e.d.

3) (Sistem de 2 ecuații liniare): Notăm cu x prețul unui kg de banane și cu y prețul unui kg de portocale.

Avem $\begin{cases} x = 2y \\ 45x + 30y = 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ 6 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$

R: 1 kg de portocale costă 3 lei.

$S = \{(6; 3)\}$

4) a) $x = (1 + \sqrt{3})^2 - 2(2 - \sqrt{5}) = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$. Deci $x = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$, g.e.d.

b) $y = (\sqrt{15} + \sqrt{75} - \sqrt{45}) \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{15}\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{15}\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$, deci $y = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

$N = x(y - 1) = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2(\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2) = 2(5 - 3) = 2 \cdot 2 = 4$. Deci $N = 4$, $4 \in \mathbb{N} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$, g.e.d.

$$5) E(x) = (x-1)^2 + (2x-1)^2 + (1-x)(2x-1) + 3x-1, x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} E(x) &= (x^2 - 2x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) + (2x - 1 - 2x^2 + x) + 3x - 1 = \\ &= \underline{x^2} - \underline{2x} + \underline{1} + \underline{4x^2} - \underline{4x} + \underline{1} + \underline{3x} - \underline{1} - \underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{1} = \\ &= 3x^2, \text{ Deci } E(x) = 3x^2, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

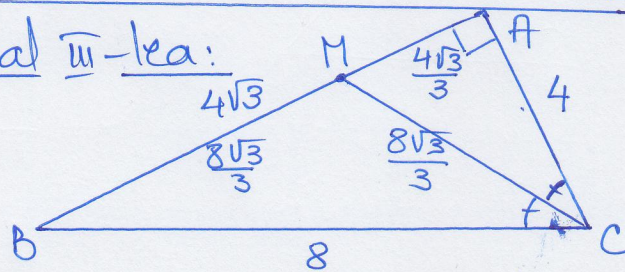
$$n \in \mathbb{N}, E(n) = 3n^2$$

Singurul nr. natural n pentru care $3n^2$ este prim este $n=1$ deoarece atunci $3n^2 = 3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 = 3$, iar 3 e nr. prim.

Obs: Pentru $n \in \{0; 2; 3; 4; \dots\}$ avem $3n^2 \in \{0; 12; 27; 48; \dots\}$
 multiplii lui 3
 nr. compuse
 nr. prim

SUBIECTUL al III-lea:

1)



a) T. Pitagora:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$AB^2 = 8^2 - 4^2 = (8-4)(8+4) = 4 \cdot 12 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3$$

$$AB = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$$

b) T. bisectoarei: Intr-un triunghi bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu laturile unghiului.

$$\text{În } \triangle ABC \text{ avem } [CM: \text{bisectoarea lui } \hat{C}, M \in [AB] \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{4\sqrt{3} - AM} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8AM = 16\sqrt{3} - 4AM \Leftrightarrow$$

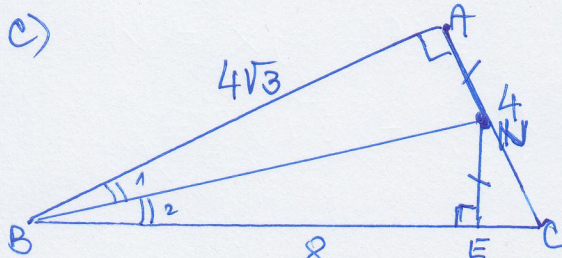
$$\Leftrightarrow 12AM = 16\sqrt{3} \Leftrightarrow AM = \frac{16\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm).}$$

$$BM = AB - AM = 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{Cu T. Pitagora în } \triangle AMC: MC^2 = AM^2 + AC^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4^2 =$$

$$= \frac{48}{9} + 16 = \frac{48 + 144}{9} = \frac{192}{9} \Rightarrow MC = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{Deci } MB = MC = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \Rightarrow \triangle BMC: \text{isoscel, g.e.d.}$$



$$\Leftrightarrow \frac{AN}{4 - AN} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2AN = 4\sqrt{3} - AN\sqrt{3} \Rightarrow AN(2 + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} = AB \text{ (g.e.d.)}$$

$$d(N, AB) = NA \text{ pt. că } NA \perp AB$$

$$d(N, AB) = d(N, BC) \Rightarrow [BN: \text{bisectoarea lui } \hat{B}]$$

(Bisect. = locul geom. al pct. egal dep. de laturile $\angle$)

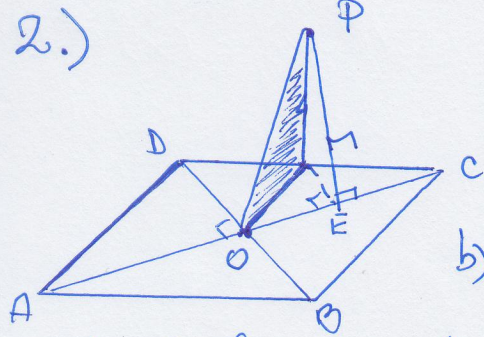
$$\text{Sau } \triangle NAB \cong \triangle NEB \text{ (C.I.)} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2.$$

$$\text{Cu T. bisectoarei avem } \frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow$$

2.)

a) $A_{\diamond} = \frac{D \cdot d}{2}$, ABCD: romb

$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$
(g.e.d.)

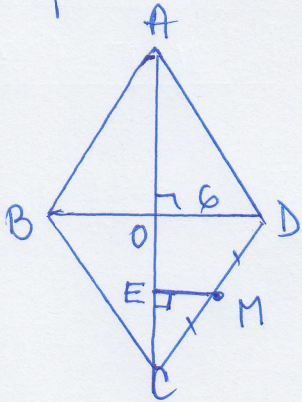


b) În $\triangle CDA$ avem $\left. \begin{array}{l} M: \text{mijlocul lui } [CD] \\ O: \text{mijlocul lui } [CA] \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [OM]:$ linie mijlocie în $\triangle CDA$, deci $DA \parallel OM$
 $OM \subset (POM) \mid \Rightarrow DA \parallel (POM)$,
(g.e.d.)

(Dacă o dreaptă exterioară unui plan este paralelă cu o dreaptă din plan, atunci este paralelă cu planul.)

c) Distanța de la un punct la o dreaptă este egală cu lungimea perpendiculararei dusă din punct pe dreaptă.

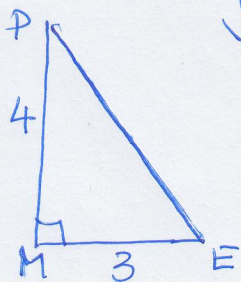


Avem $PM \perp (ABC)$
Construim $ME \perp AC$ $\Rightarrow PE \perp AC$ (T. 3.1),
deci $d(P; AC) = PE$.

(1) $\frac{DO \perp OC$ (diagonalele rombului sunt perpendiculare)
 $OD = \frac{BD}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$ (diagonalele rombului se înjumătățesc)

(2) $ME \perp OC$

(3) $M: \text{mijlocul lui } [CD]$. Din (1); (2); (3) $\Rightarrow [ME]$ este linie mijlocie în $\triangle COD$, deci $ME = \frac{OD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$



Cu T.P. în $\triangle MPE$ dreptunghiul în M ($PM \perp (ABC) \mid \Rightarrow ME \perp (ABC) \mid \Rightarrow PM \perp ME$)
avem:

$PE^2 = MP^2 + ME^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow PE = 5 \text{ cm}$

Deci $d(P; AC) = 5 \text{ cm}$.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 22

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	10	5p
2.	2	5p
3.	1	5p
4.	12	5p
5.	60	5p
6.	0	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează paralelogramul Notează paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle ABC) > 90^\circ$	4p 1p
2.	$\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{11} = \frac{a+c}{14}$ $\frac{b}{7} = \frac{a+c}{14} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$, deci b este media aritmetică a numerelor a și c	3p 2p
3.	Un kilogram de banane costă $2x$, unde x este prețul unui kilogram de portocale, deci $30 \cdot x + 45 \cdot 2x = 360$ $x = 3$ lei	3p 2p
4.	a) $x = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 + 2\sqrt{5} =$ $= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ b) $y = (\sqrt{15} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} = 1 + \frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$ $N = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2(5 - 3) = 4$, care este număr natural	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 - 2x^2 + x + 3x - 1 = 3x^2$, pentru orice număr real x $E(n) = 3n^2$, pentru orice număr natural n și, cum $E(n)$ este număr prim, obținem $n = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\triangle ABC$ este dreptunghic în $A \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} =$ $= \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm	3p 2p
	b) $\triangle ABC$ este dreptunghic și $AC = \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\angle ABC) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle ACB) = 60^\circ$ Semidreapta CM este bisectoarea unghiului $ACB \Rightarrow m(\angle MCB) = \frac{m(\angle ACB)}{2} = 30^\circ$, de unde obținem $\angle MBC \equiv \angle MCB$, deci triunghiul BMC este isoscel	2p 3p

	c) $ND \perp BC$, $D \in BC \Rightarrow d(N, BC) = ND$ și $NA \perp AB \Rightarrow d(N, AB) = NA$, deci $NA = DN$ $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DCN$ și $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CDN \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle DCN \Rightarrow \frac{AB}{DN} = \frac{BC}{NC} \Rightarrow AB \cdot NC = BC \cdot DN$ Cum $DN = NA$ și $NC = AC - NA$, obținem $4\sqrt{3} \cdot (4 - NA) = 8NA \Rightarrow 8NA + 4\sqrt{3}NA = 16\sqrt{3}$, de unde obținem $4(2 + \sqrt{3})NA = 16\sqrt{3} \text{ cm}$, deci $(2 + \sqrt{3})NA = 4\sqrt{3} \text{ cm} = AB$	1p 2p 2p
2.	a) $ABCD$ este romb, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} =$ $= \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) $ABCD$ este romb și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și $BD \Rightarrow O$ este mijlocul segmentului AC și, cum M este mijlocul segmentului CD, obținem că MO este linie mijlocie în $\triangle ADC$ $AD \parallel MO$, $MO \subset (POM) \Rightarrow AD \parallel (POM)$	2p 3p
	c) $PM \perp (ABC)$, $MN \perp AC$, $N \in AC$, $AC \subset (ABC) \Rightarrow PN \perp AC$, deci $d(P, AC) = PN$ $MN \perp AC$, $BD \perp AC \Rightarrow MN \parallel BD$ și, cum M este mijlocul segmentului CD, obținem că MN este linie mijlocie în $\triangle DOC$, deci $MN = \frac{DO}{2} = 3 \text{ cm}$ și, cum $PM \perp (ABC)$, $MN \subset (ABC)$, deci $PM \perp MN$, obținem $PN = \sqrt{PM^2 + MN^2} = 5 \text{ cm}$	2p 3p