

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 24

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $20 \cdot 4 - 4 \cdot 10$ este egal cu
- 5p 2. Numărul care reprezintă 75% din 100 este egal cu
- 5p 3. Cel mai mare număr par din mulțimea numerelor naturale de două cifre este
- 5p 4. Dacă unghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt suplementare și $m(\angle ABC) = 60^\circ$, atunci măsura unghiului $A'B'C'$ este egală cu ... $^\circ$.
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$. Suma lungimilor tuturor muchiilor acestui cub este egală cu 120 cm. Lungimea muchiei AB este egală cu ... cm.

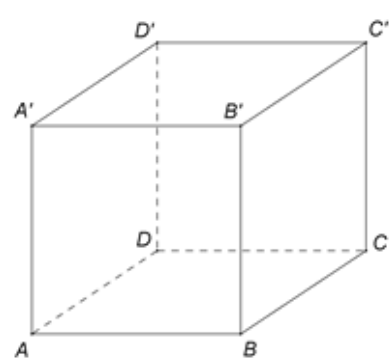
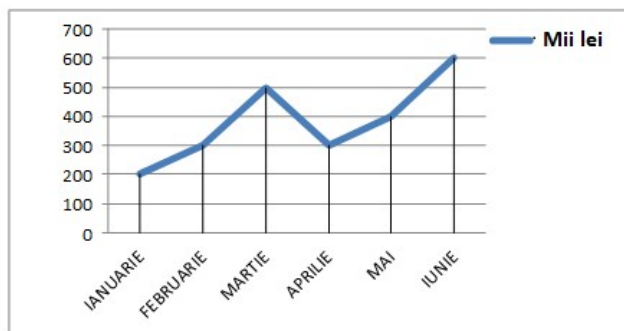


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare sunt prezentate încasările unei firme, în mii lei, înregistrate în fiecare dintre primele șase luni ale unui an.



Conform informațiilor din diagramă, media sumelor încasate în primele cinci luni ale anului este egală cu ... mii lei.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ și vârful V .
- 5p 2. Determinați numerele naturale de patru cifre care se divid cu 10 și cu 9 și care au două cifre egale cu 4.
- 5p 3. Într-o clasă, numărul elevilor absenți din ziua de luni a reprezentat $\frac{1}{8}$ din numărul elevilor prezenți. Marți, numărul elevilor absenți a scăzut cu 1 față de luni și a reprezentat 8% din numărul elevilor prezenți în acea zi. Determinați numărul elevilor din acea clasă.

4. Se consideră numerele reale $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{27})$ și $b = \left(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
- 5p a) Arătați că $a = -5$.
- 5p b) Arătați că numărul $N = b - \sqrt{-a}$ este prim.
- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)(3x-2) - (x-1)^2 - (2x-1)^2 + 26$, unde x este număr real. Demonstrați că $E(7^n - 2)$ se divide cu 7^{n+1} , pentru orice număr natural nenul n .

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un cerc de centru O și rază $R = 16$ cm. Punctele A, B, C și D , în această ordine, sunt situate pe $\mathcal{C}(O, R)$ astfel încât $m(\widehat{AB}) = 75^\circ$, $m(\widehat{BC}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{CD}) = 75^\circ$.

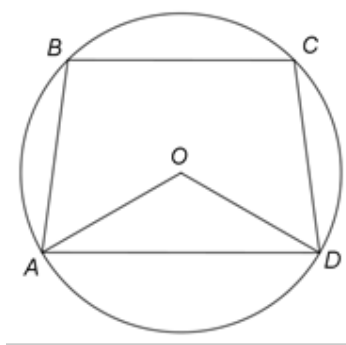


Figura 2

- 5p a) Arătați că arcul mic $\widehat{AD}$ are măsura de 120° .
- 5p b) Determinați lungimea coardei BC .
- 5p c) Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel.
2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă triunghiulară $VABC$, cu baza triunghiul echilateral ABC , $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $VA = 20$ cm și $VO \perp (ABC)$, unde O este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Punctul M este mijlocul muchiei BC , punctul N este mijlocul segmentului AO și punctul P este situat pe muchia VA astfel încât $VP = 2AP$.

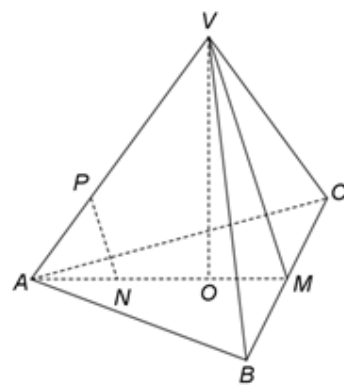


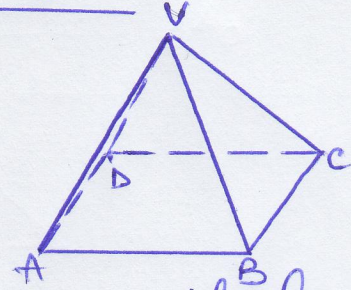
Figura 3

- 5p a) Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $108\sqrt{3}$ cm².
- 5p b) Demonstrați că dreapta NP este paralelă cu planul (VBC) .
- 5p c) Arătați că sinusul unghiului dintre dreapta VO și planul (VBC) este egal cu $\frac{3\sqrt{73}}{73}$.

TEST 24: - REZOLVAPE:

- Subiectul I: 1) $20 \cdot 4 - 4 \cdot 10 = 80 - 40 = 40$;
2) $(45\% \text{ din } 100) = \frac{75}{100} \cdot 100 = 75$;
3) Cel mai mare nr. natural par de două cifre este 98.
4) Două unghiuri sunt suplementare dacă au, împreună, 180° .
 $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{A'B'C'}) = 180^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{A'B'C'}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
5) Cubul are 12 muchii egale. $12x = 120 \text{ cm} \Rightarrow x = 120 : 12 = 10 \text{ cm}$.
6) Primele 5 luni sunt ian., feb., mar., apr., mai.
ian.: 200 mii, feb.: 300 mii, mar.: 500 mii, apr.: 300 mii, mai: 400 mii
 $m_a = \frac{200 + 300 + 500 + 300 + 400}{5} = \frac{1700}{5} = 340 \text{ (mii lei)}$.

Subiectul al II-lea: 1)



- 2) $\overline{abcd} : 10 \Rightarrow d = 0$;
Deci numerele vor avea forma $\overline{abco}$.
Un număr este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

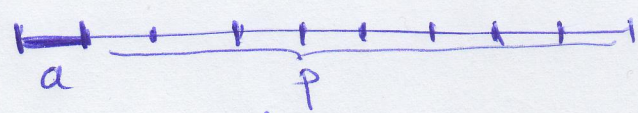
Deci $a + b + c + 0 \in \{9; 18; 27\}$

Dar, deoarece două din cifre sunt egale cu 4, avem:

$$a + b + c = 8 + 1 = 9, \text{ deci cea de a treia cifră e } 1.$$

Avem soluțiile: 1440; 4140 și 4410.

- 3) Notăm cu x nr. elevilor din clasă.

Luni:  $\frac{x}{9}$: absenți $\frac{8x}{9}$ prez.

Marti, $\frac{x}{9} - 1$ absenți $\Rightarrow \frac{8x}{9} + 1$ prezenți și avem ecuația

$$\frac{x}{9} - 1 = \frac{8}{100} \left(\frac{8x}{9} + 1 \right) \Leftrightarrow \frac{x - 9}{9} = \frac{8}{100} \cdot \frac{8x + 9}{9} \quad | \cdot 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100x - 900 = 8(8x + 9) \Leftrightarrow 100x - 900 = 64x + 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100x - 64x = 972 \Leftrightarrow 36x = 972 \Leftrightarrow x = \frac{972}{36} = \frac{162}{6} = 27.$$

R: Nr. elevilor din clasă este 27.

$$4) a) a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) =$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 5 = [(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2] \cdot 5 = (2 - 3) \cdot 5 =$$

$$= (-1) \cdot 5 = -5, \text{ deci } a = -5, \text{ g.e.d. } \begin{cases} \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$b) b = \left(\frac{18 + 3 + 2 + 1}{6} \right) \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{24}{6} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4} = 3 + \sqrt{5}, \text{ deci } b = 3 + \sqrt{5}$$

$$N = b - \sqrt{-a} = 3 + \sqrt{5} - \sqrt{-(-5)} = 3 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3, \text{ iar } 3 \text{ e prim}$$

Deci N este prim, g.e.d.

$$5) E(x) = (2x+3)(3x-2) - (x-1)^2 - (2x-1)^2 + 26 =$$

$$= 6x^2 - 4x + 9x - 6 - (x^2 - 2x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) + 26 =$$

$$= \underline{6x^2} + \underline{5x} \underline{(-6)} - \underline{x^2} + \underline{2x} \underline{(-1)} - \underline{4x^2} + \underline{4x} \underline{(-1)} + 26 =$$

$$= x^2 + 11x + 18 = x^2 + 9x + 2x + 18 =$$

$$= x(x+9) + 2(x+9) = (x+9)(x+2).$$

Deci $E(x) = (x+9)(x+2)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ avem $E(7^n - 2) = (7^n - 2 + 9)(7^n - 2 + 2) =$

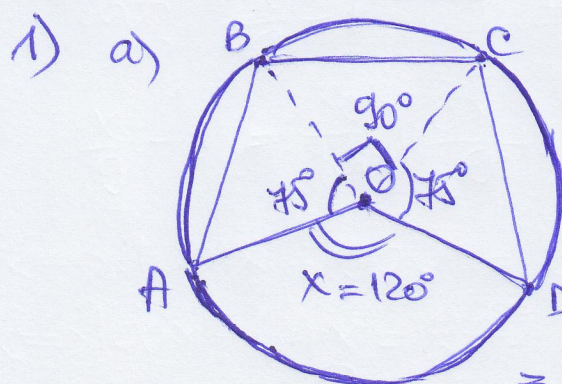
$$= (7^n + 7)(7^n) = 7^n \cdot 7^n + 7 \cdot 7^n = 7^{2n} + 7^{n+1} =$$

$$= 7^{(n+1)+(n-1)} + 7^{n+1} =$$

$$= \underline{7^{n+1}} \cdot \underline{7^{n-1}} + \underline{7^{n+1}} = 7^{n+1}(7^{n-1} + 1), \text{ deci } N: 7^{n+1}$$

(pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$), g.e.d. $\left. \begin{matrix} 2n = n+1 + n-1 \end{matrix} \right\}$

Subiectul al III-lea:



Măsura unghiului la centru este egală cu măsura arcului de cerc „subînțins” de el. În jurul lui O se formează unghiurile care au împreună 360° .

$$m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{AOB}) = 360^\circ - (75^\circ + 75^\circ + 90^\circ) =$$

$$= 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ. \text{ Deci } m(\widehat{AD}) = 120^\circ, \text{ g.e.d.}$$

b) O dreaptă exterioară unui plan este paralelă cu planul dacă este paralelă cu o dreaptă din plan.

La noi vom demonstra că $\left. \begin{array}{l} PN \parallel VM \\ VM \subset (VBC) \end{array} \right\} \Rightarrow NP \parallel (VBC) \text{ g.e.d.}$

Într-adevăr, considerând $\triangle AVM$ observăm că

$$\frac{AP}{PV} = \frac{1}{2} \text{ pt. că } VP = 2AP \text{ (ipoteză)}$$

$$\frac{AN}{NH} = \frac{1}{2} \text{ pt. că } AO = 2OM, \text{ o fiind centrul } \triangle ABC \text{ echilateral (degenitate) } n' AN = NO.$$

$$\text{Deci } \frac{AP}{PV} = \frac{AN}{NH} \Rightarrow PN \parallel VM \text{ (Reciprocă T. Thales), g.e.d.}$$

c) Măsura unghiului format de o dreaptă cu un plan este egală cu măsura unghiului format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

$$\left. \begin{array}{l} BM \perp VM \\ BM \perp AM \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BM \perp (VAM) \\ BM \subset (ABC) \end{array} \right| \Rightarrow (VAM) \perp (ABC) \} \Rightarrow$$

$$V \in (VBC).$$

$\Rightarrow$ proiecția lui VO pe (VBC) este VM, iar atunci

$$m[\widehat{VO; (VBC)}] = m[\widehat{VO; VM}] = m[\widehat{OVM}].$$

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ (cm)} \Rightarrow OM = \frac{1}{3}AM = \frac{18}{3} = 6 \text{ (cm)}.$$

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Cu T.P. în } \triangle VOA \text{ avem } VO^2 = VA^2 - OA^2 = 20^2 - 12^2 = (20-12)(20+12) = 8 \cdot 32 = 256 \Rightarrow VO = \sqrt{256} = 16 \text{ (cm)}.$$

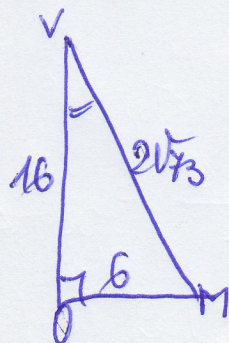
$$\text{Cu T.P. în } \triangle VOM \text{ avem } VM^2 = VO^2 + OM^2 = 16^2 + 6^2 = 256 + 36 = 292$$

$$VM = \sqrt{292} = 2\sqrt{73} \text{ (cm)}.$$

În $\triangle OVM$ dreptunghic în $\hat{O}$ avem:

$$\sin \widehat{OVM} = \frac{OM}{VM} = \frac{6}{2\sqrt{73}} = \frac{3}{\sqrt{73}}$$

$$= \frac{3\sqrt{73}}{73}. \text{ Deci } m[\widehat{VO; (VBC)}] = \frac{3\sqrt{73}}{73}, \text{ g.e.d.}$$



$$\begin{array}{r} 292 \overline{) 292} \\ \underline{146} \\ 146 \\ \underline{73} \\ 73 \\ \underline{1} \\ 1 \end{array}$$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 24

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	40	5p
2.	75	5p
3.	98	5p
4.	120	5p
5.	10	5p
6.	340	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează piramida cu baza pătrat Notează piramida $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ și vârful V	4p 1p
2.	$\overline{abcd}$ se divide cu $10 \Rightarrow d = 0$ și, cum $\overline{abc0}$ se divide cu $9 \Rightarrow a + b + c$ se divide cu 9 Cum două dintre cifre sunt egale cu 4, obținem că una din cifre este 1, deci numerele sunt 1440, 4140 și 4410	2p 3p
3.	Luni au lipsit $\frac{x}{9}$ elevi și au fost prezenți $\frac{8x}{9}$ elevi, unde x este numărul elevilor din clasă $\frac{x}{9} - 1 = \frac{8}{100} \cdot \left(\frac{8x}{9} + 1 \right)$, de unde obținem $x = 27$	2p 3p
4.	a) $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 5(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5(2 - 3) = -5$ b) $b = \frac{18 + 3 + 2 + 1}{6} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4} = \frac{24}{6} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = 3 + \sqrt{5}$ $N = 3 + \sqrt{5} - \sqrt{-(-5)} = 3 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3$, care este număr prim	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 6x^2 - 4x + 9x - 6 - x^2 + 2x - 1 - 4x^2 + 4x - 1 + 26 = x^2 + 11x + 18$, pentru orice număr real x $E(7^n - 2) = (7^n - 2)^2 + 11(7^n - 2) + 18 = 7^{2n} - 4 \cdot 7^n + 4 + 11 \cdot 7^n - 22 + 18 = 7^{2n} + 7 \cdot 7^n = 7^{n+1}(7^{n-1} + 1)$, care se divide cu 7^{n+1} , pentru orice număr natural nenul n	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CD}) + m(\widehat{AD}) = 360^\circ$ $m(\widehat{AD}) = 360^\circ - (75^\circ + 90^\circ + 75^\circ) = 120^\circ$	3p 2p
	b) $\sphericalangle BOC$ este unghi la centru și $m(\widehat{BC}) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ $\triangle BOC$ este dreptunghic isoscel cu $OB = OC = 16\text{ cm}$, deci $BC = 16\sqrt{2}\text{ cm}$	2p 3p

	c) $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) \Rightarrow AB = CD$ $\sphericalangle ACB$ înscris în cerc $\Rightarrow m(\sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB})$, $\sphericalangle CAD$ înscris în cerc $\Rightarrow m(\sphericalangle CAD) = \frac{1}{2}m(\widehat{CD})$ deci $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CAD$ și, cum $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle CAD$ sunt alterne interne, obținem $AD \parallel BC$, deci $ABCD$ este trapez isoscel	2p 3p
2.	a) $\triangle ABC$ este echilateral, deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} =$ $= \frac{432\sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) O centrul cercului circumscris $\triangle ABC \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM$ și, cum N este mijlocul segmentului AO, obținem $\frac{AN}{AM} = \frac{1}{3}$ și, cum $P \in VA$ astfel încât $VP = 2AP \Rightarrow \frac{AP}{AV} = \frac{1}{3}$, obținem $\frac{AN}{AM} = \frac{AP}{AV}$, deci $NP \parallel VM$ $NP \parallel VM$, $VM \subset (VBC) \Rightarrow NP \parallel (VBC)$	3p 2p
	c) O centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ și $VO \perp (ABC) \Rightarrow VB = VC$, deci $VM \perp BC$ și, cum $OM \perp BC$ și $OM \cap VM = \{M\}$, obținem $BC \perp (VOM)$ Pentru $OQ \perp VM$, $Q \in VM$, cum $OQ \subset (VOM) \Rightarrow BC \perp OQ$ și, cum $VM \cap BC = \{M\}$, obținem $OQ \perp (VBC)$, deci $m(\sphericalangle(VO, (VBC))) = m(\sphericalangle(VO, VQ)) = m(\sphericalangle OVQ)$ $AO = 12 \text{ cm}$ și $\triangle VOA$ este dreptunghic, deci $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = 16 \text{ cm}$ și, cum $OM = 6 \text{ cm}$, obținem $VM = 2\sqrt{73} \text{ cm}$, deci $\sin(\sphericalangle OVQ) = \sin(\sphericalangle OVM) = \frac{OM}{VM} = \frac{3\sqrt{73}}{73}$	1p 2p 2p