

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 36

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $3 \cdot 10 - 10$ este egal cu
- 5p 2. Dintre numerele 2,(3) și 2,3, mai mare este numărul
- 5p 3. Dacă suma a două numere naturale consecutive este egală cu 11, atunci cel mai mic dintre numere este egal cu
- 5p 4. Un triunghi dreptunghic isoscel are o catetă egală cu 6cm. Aria acestui triunghi este egală cu ... cm².
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de 5cm. Lungimea segmentului AC este egală cu ...cm.

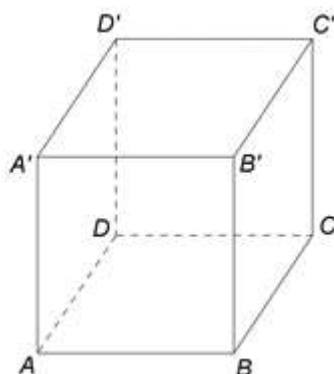


Figura 1

- 5p 6. În tabelul următor sunt prezentate informații despre înălțimile jucătorilor din lotul unei echipe de baschet.

Înălțimea (în cm)	190 - 194	195 - 199	200 - 204	205 - 210
Nr. de jucători	4	3	3	2

Conform informațiilor din tabel, numărul jucătorilor din lot care au înălțimea mai mare sau egală cu 2m este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un triunghi ABC dreptunghic în A.
- 5p 2. Determinați cel mai mare număr natural de trei cifre distincte două câte două, care are suma cifrelor egală cu 20.
- 5p 3. Un obiect s-a ieftinit cu 20% și apoi noul preț s-a mărit cu 20%. Ultimul preț este egal cu 288 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.
4. Se consideră numerele $x = \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{54} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{6})} \cdot \sqrt{2}$ și $y = \sqrt{147} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + \sqrt{28} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
- 5p a) Arătați că $x = 4$.
- 5p b) Calculați media geometrică a numerelor x și y.
- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (x+1)^2 + (x-3)^2 - (7+x^2)$, unde x este număr real. Arătați că numărul natural $E(n)$ este multiplu de 8, pentru orice număr natural impar n.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AD \perp AB$, $AB \parallel CD$, $AB = 8\text{ cm}$, $CD = 4\text{ cm}$ și $AD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$. Punctul E este situat pe latura BC astfel încât $\triangle ADE$ este echilateral.

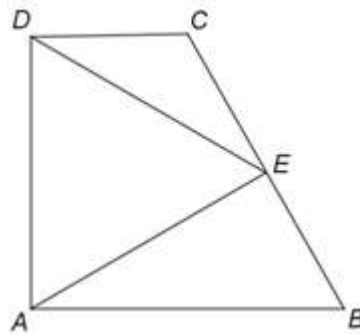


Figura 2

- 5p a) Arătați că aria trapezului $ABCD$ este egală cu $24\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
5p b) Arătați că perimetrul trapezului $ABCD$ este mai mic decât 27 cm .
5p c) Demonstrați că punctul E este mijlocul laturii BC .

2. În *Figura 3* este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB = 20\text{ cm}$ și punctele M și N , situate de aceeași parte a planului (ABC) , astfel încât $MA \perp (ABC)$, $NC \perp (ABC)$, $MA = 30\text{ cm}$ și $NC = 15\text{ cm}$.

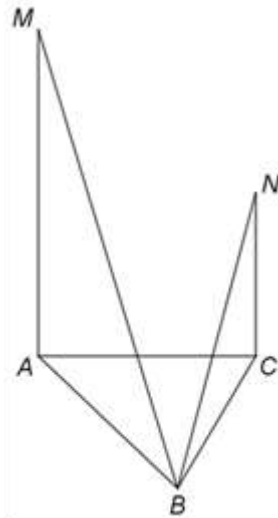


Figura 3

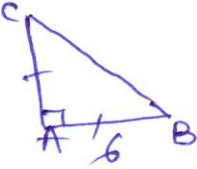
- 5p a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 60 cm .
5p b) Demonstrați că dreapta MA este paralelă cu planul (NBC) .
5p c) Determinați distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planelor (MNB) și (ABC) .

TESTUL 36: REZOLVARE

SUBIECTUL I: 1) $3 \cdot 10 - 10 = 30 - 10 = 20$;

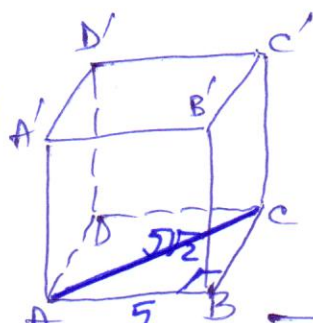
$$\left. \begin{array}{l} 2) \ 2,(3) = 2,333... \\ \quad 2,3 = 2,300... \end{array} \right\} \Rightarrow 2,(3) > 2,3.$$

3) n și $n+1$ sunt consecutive. $n+n+1=11 \Leftrightarrow 2n=11-1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2n=10 \Leftrightarrow n=5$. Nr. sunt 5 și 6, iar 5 e cel mai mic.

4)  ΔABC : dr. isoscel $\Rightarrow AB=AC=6$ cm,

$$m(\hat{A}) = 90^\circ$$

$$A_{\Delta} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$$



5) AC : diagonala pătratului $ABCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = l\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

Atenție la „litere”. Cse poate confunda ușor cu AC' .
Dacă aveți dubii calculați și $AC' = 5\sqrt{3}$ (diagonala cubului)
și dați răspunsul de genul: 5.) $AC = 5\sqrt{2}$ cm; $AC' = 5\sqrt{3}$ cm
ca să nu pierdeți cele 5 puncte.

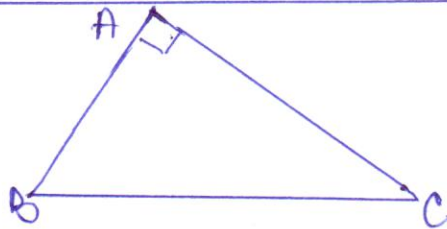
6) $190 \text{ cm} = 1,9 \text{ m}$; ...; $210 \text{ cm} = 2,1 \text{ m}$ etc.

Nr. jucătorilor cu înălțimea $\geq 2 \text{ m}$ ($\geq 200 \text{ cm}$) este $3+2=5$ (jucători)

SUBIECTUL al II-lea:

1)

2) $\overline{abc} \in \mathbb{N}$, maxim
 $a \neq b \neq c \neq a$
 $a+b+c=20$



$$\Rightarrow a=9, b=8 \text{ iar } c=20-(a+b)=$$
$$=20-(9+8)=20-17=3.$$

R: Numărul căutat este 983.

3) Notăm cu x prețul inițial și avem:

după ieftinire cu 20% prețul este de $(80\% \text{ din } x) = \frac{80}{100} \cdot x$.

După mărirea, ulterioară, cu 20% prețul este $(120\% \text{ din } \frac{80}{100} \cdot x) =$
 $= \frac{120}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot x$. Avem $\frac{120}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot x = 288 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{96}{100} x = 288 \Leftrightarrow x = 288 \cdot \frac{100}{96} = 288 \cdot \frac{5}{4} = 360.$$

R: Prețul inițial al obiectului a fost de 360 lei.

$$4) a) x = \frac{2 \cdot 2\sqrt{6}}{3\sqrt{6} - \sqrt{2}(3\sqrt{3} - \sqrt{6})} \cdot \sqrt{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4. \text{ Deci } x = 4, \text{ g.e.d.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6} \\ \sqrt{24} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$b) y = 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} =$$

$$= 4 + \frac{4\sqrt{21}}{7} + 2 - \sqrt{21} = 9 + \sqrt{21} - \sqrt{21} = 9. \text{ Deci } y = 9.$$

$$mg(x; y) = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$5) E(x) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 - 7 - x^2 = x^2 - 4x + 3 =$$

$$= x^2 - x - 3x + 3 = x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(x-3).$$

Deci $E(x) = (x-1)(x-3)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $n \in \mathbb{N}$ este impar atunci $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

$$E(n) = (n-1)(n-3) = (2k+1-1)(2k+1-3) =$$

$$= 2k(2k-2) = 2k \cdot 2(k-1)$$

Pentru $k=0 \Rightarrow n=1$, iar $E(n) = E(1) = 0 : 8$

Pentru $k=1 \Rightarrow n=3$, iar $E(n) = E(3) = 0 : 8$

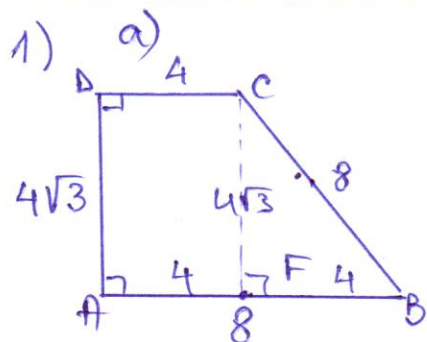
Pentru $k \geq 2$ $E(n) = 4k(k-1)$ (1)

$k \cdot (k-1)$ este produsul a două nr. naturale consecutive, deci este par (Dacă k : par e bine, iar dacă k : impar $\Rightarrow k-1$: par, iar „par · impar = par”).

Deci $k(k-1)$: par $\Rightarrow k \cdot (k-1) = 2 \cdot v$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow E(n) = 4 \cdot 2 \cdot v = 8v$, deci $E(n) : 8$ pentru orice nr. n natural impar, g.e.d.

SUBIECTUL a) III-lea:



$$A_{\square} = \frac{B+b}{2} \cdot i$$

$$A_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD = \frac{8+4}{2} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{12}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ g.e.d.}$$

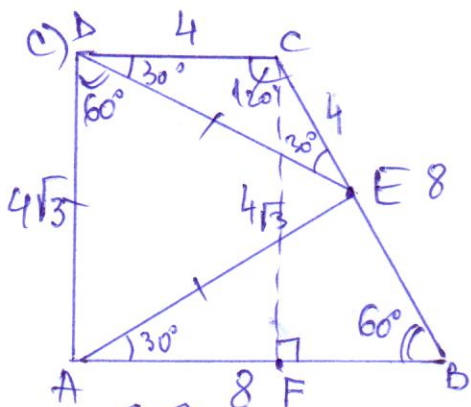
b) Duceam $CF \perp AB$ și avem: $AF = CD = 4 \text{ cm} \Rightarrow FB = AB - AF = 8 - 4 = 4 \text{ (cm)}$. $AD = CF = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

Cu T.P. în $\triangle FBC$ avem: $BC^2 = FB^2 + FC^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 48 = 64 \Rightarrow BC = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}$.

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 8 + 8 + 4 + 4\sqrt{3} = 20 + 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$P_{ABCD} < 27 \Leftrightarrow 20 + 4\sqrt{3} < 27 \quad | -20 \Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 \quad | (\cdot)^2 \Leftrightarrow$$

$$(4\sqrt{3})^2 < 7^2 \Leftrightarrow 48 < 49 \text{ (A)}. \text{ Deci } P_{ABCD} < 27 \text{ cm, g.e.d.}$$



În $\triangle CFB$, dreptunghiul în F avem:

$$\sin \hat{B} = \frac{CF}{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\hat{B}) = 60^\circ$$

$\hat{B}$ și $\hat{C}$ în trapez sunt suplementare $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m(\hat{C}) = 180^\circ - m(\hat{B}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \textcircled{A}$$

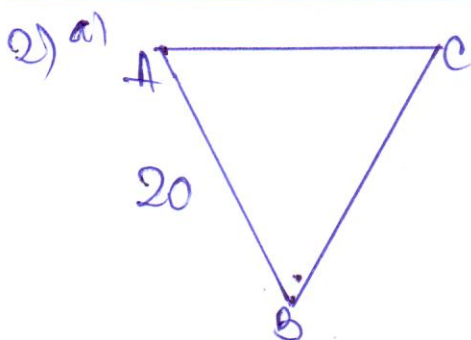
$$m(\widehat{ADE}) = 60^\circ (\text{în } \triangle EAD \text{ echilateral}) \Rightarrow m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{ADC}) - m(\widehat{ADE}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Atunci, conform (A) $\Rightarrow m(\widehat{CED}) = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$, deci

$$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{CED}) = 30^\circ, \text{ deci } \triangle CDE: \text{ isoscel, cu } CD = CE = 4 \text{ cm.}$$

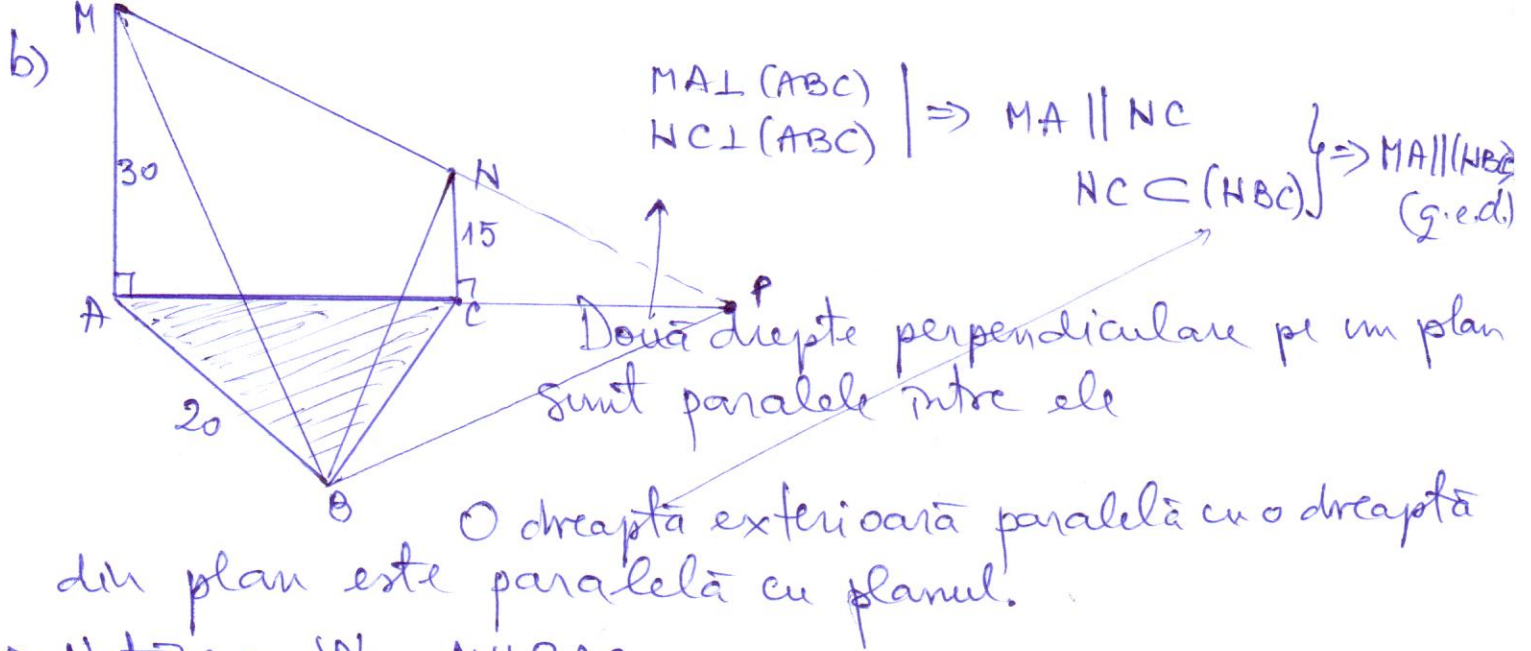
$$BE = BC - CE = 8 - 4 = 4 \text{ cm.}$$

Atunci $BE = CE = 4 \text{ cm}$, deci E este mijlocul lui $[BC]$, g.e.d.



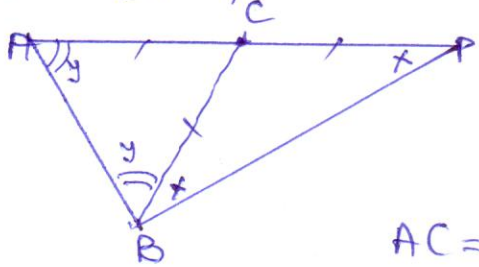
$$P_{\triangle ech} = 3 \cdot l$$

$$P_{\triangle ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 20 = 60 \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$$



c) Notăm cu $\{P\} = MN \cap AC$

$$\begin{aligned}
 &P \in MN \subset (MNB) \\
 &B \in (MNB) \\
 &\Rightarrow BPC \subset (MNB) \\
 &P \in AC \subset (ABC) \\
 &B \in (ABC) \\
 &\Rightarrow BPC \subset (ABC) \\
 &\Rightarrow (MNB) \cap (ABC) = BP.
 \end{aligned}$$



$$\Delta PCN \sim \Delta PAM \text{ (T.f.N.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{CN}{AM} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

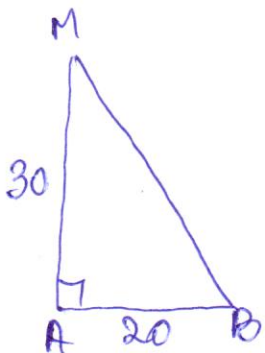
$$\Rightarrow CP = \frac{AP}{2} \Rightarrow C: \text{mijlocul lui } [AP].$$

$$AC = CP = AB = BC \Rightarrow$$

$\Rightarrow BC = \frac{1}{2} AP$, adică mediana BC este jumătate din latura corespunzătoare ei $\Rightarrow m(\widehat{ABP}) = 90^\circ$

$$2x + 2y = 180^\circ \text{ în } \Delta ABP \Rightarrow x + y = 90^\circ \Rightarrow$$

Avem: $MA \perp ABC$
 $AB \perp BP \mid \Rightarrow MB \perp BP \text{ (T.3.L.)} \Rightarrow d(M; (BP)) = MB.$



Cu T.P. în ΔMAB avem:

$$\begin{aligned}
 MB^2 &= AM^2 + AB^2 = 30^2 + 20^2 = 900 + 400 = \\
 &= 1300 \Rightarrow MB = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} \text{ (cm.)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Deci } d[H; BP] = MB = 10\sqrt{13} \text{ cm,}$$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 36

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	20	5p
2.	2,(3)	5p
3.	5	5p
4.	18	5p
5.	$5\sqrt{2}$	5p
6.	5	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează triunghiul dreptunghic Notează triunghiul ABC dreptunghic în A	4p 1p
2.	$a + b + c = 20$ și, cum $\overline{abc}$ este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte două câte două, obținem $a = 9$ $b + c = 11 \Rightarrow b = 8$ și $c = 3$, deci numărul este 983	2p 3p
3.	$x - \frac{20}{100} \cdot x + \frac{20}{100} \left(x - \frac{20}{100} \cdot x \right) = 288$, unde x este prețul inițial al obiectului $x = 300$ de lei	3p 2p
4.	a) $x = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{54} - \sqrt{54} + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} =$ $= \frac{4\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$ b) $y = \sqrt{\frac{147}{3}} + \sqrt{\frac{147}{7}} + \sqrt{\frac{28}{7}} - \sqrt{\frac{28 \cdot 3}{4}} = \sqrt{49} + \sqrt{21} + \sqrt{4} - \sqrt{21} = 7 + 2 = 9$ $m_g = \sqrt{xy} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 - 7 - x^2 = x^2 - 4x + 3$, pentru orice număr real x Pentru $n = 2k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}$, $E(2k + 1) = (2k + 1)^2 - 4(2k + 1) + 3 = 4k^2 - 4k = 4k(k - 1)$, și, cum $k(k - 1)$ este număr natural par, obținem că $E(n)$ este multiplu de 8, pentru orice număr natural impar n	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} =$ $= \frac{(8 + 4) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$	3p 2p
----	---	----------

	b) $ADCM$ dreptunghi, unde $CM \perp AB$, $M \in AB \Rightarrow AM = CD = 4\text{cm}$ și $CM = AD = 4\sqrt{3}\text{cm}$ și, cum $\triangle BCM$ este dreptunghic, obținem $BC = 8\text{cm}$ $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 20 + 4\sqrt{3}\text{cm}$ și, cum $4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow \sqrt{48} < \sqrt{49}$, obținem că $P_{ABCD} < 27\text{cm}$	2p 3p
	c) $\triangle ADE$ este echilateral, deci $EF \perp AD$, unde F este mijlocul segmentului AD și, cum $AD \perp AB$, obținem că $EF \parallel AB$ $EF \parallel AB$ și F este mijlocul segmentului AD, deci EF este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, de unde obținem că punctul E este mijlocul laturii BC	2p 3p
2.	a) $P_{\triangle ABC} = 3AB =$ $= 3 \cdot 20 = 60\text{cm}$	3p 2p
	b) $MA \perp (ABC)$ și $NC \perp (ABC) \Rightarrow MA \parallel NC$ $MA \parallel NC$ și $NC \subset (NBC)$, deci $MA \parallel (NBC)$	2p 3p
	c) $(MNB) \cap (ABC) = BP$, unde P este punctul de intersecție a dreptelor MN și AC și, cum $MA \parallel NC \Rightarrow \triangle PCN \sim \triangle PAM$, deci $\frac{PC}{PA} = \frac{NC}{MA} = \frac{PN}{PM}$, de unde obținem $\frac{PC}{PA} = \frac{1}{2}$, deci C este mijlocul segmentului AP $CA = CB = CP \Rightarrow \triangle ABP$ este dreptunghic $\Rightarrow AB \perp BP$ și, cum $MA \perp (ABC)$ și $BP \subset (ABC)$, obținem că $MB \perp BP$, deci $d(M, BP) = MB = \sqrt{MA^2 + AB^2} = 10\sqrt{13}\text{cm}$	2p 3p