



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI
ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2020 - 2021

Matematică

Testul 4

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de două ore.

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

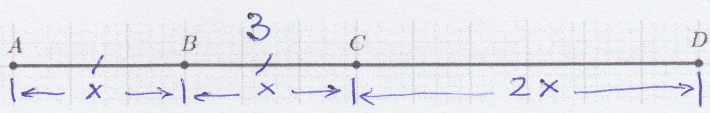
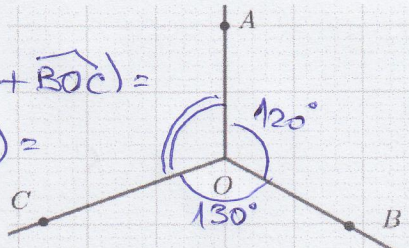
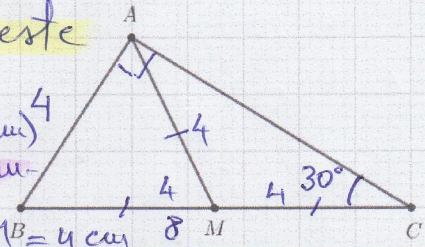
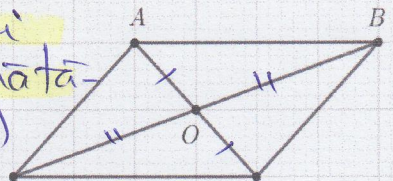
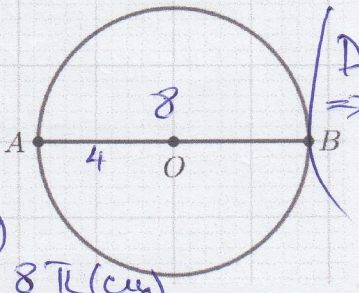
5p	1. Dintre numerele 0, 2, 4 și 15, numărul prim este: a) 0 b) 2 c) 4 d) 15										
5p	2. În tabelul de mai jos este prezentat numărul manualelor de matematică pentru gimnaziu, pe an de studiu, din biblioteca unei școli: <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <thead> <tr> <th>Tipul manualului</th> <th>Numărul de manuale</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mate_V</td> <td>280</td> </tr> <tr> <td>Mate_VI</td> <td>200</td> </tr> <tr> <td>Mate_VII</td> <td>250</td> </tr> <tr> <td>Mate_VIII</td> <td>270</td> </tr> </tbody> </table> Tipul manualului care reprezintă un sfert din totalul manualelor de matematică pentru gimnaziu din biblioteca școlii, este: a) Mate_V b) Mate_VI c) Mate_VII d) Mate_VIII <i>TOTAL: 280 + 200 + 250 + 270 = 1000 $\frac{1}{4} \cdot 1000 = 250$ (Mate VII)</i>	Tipul manualului	Numărul de manuale	Mate_V	280	Mate_VI	200	Mate_VII	250	Mate_VIII	270
Tipul manualului	Numărul de manuale										
Mate_V	280										
Mate_VI	200										
Mate_VII	250										
Mate_VIII	270										
5p	3. După o scumpire cu 20%, prețul unui produs a crescut cu 12 lei. Prețul inițial al produsului este: a) 240 lei b) 120 lei c) 72 lei d) 60 lei <i>$\frac{20}{100} \cdot x = 12$; $x = 12 : \frac{20}{100} = 60$ (lei)</i>										
5p	4. Dintre numerele $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^7}$, $\frac{1}{2^3}$ și $\frac{1}{2^8}$, cel mai mare este: ... a) $\frac{1}{2^8}$ b) $\frac{1}{2^7}$ c) $\frac{1}{2^4}$ d) $\frac{1}{2^3}$ <i>cel cu numitorul mai mic, anume $\frac{1}{2^3}$</i>										
5p	5. Patru elevi, Cătălin, Nicolae, Anastasia și Ana, au calculat suma numerelor a și b , știind că $a^2 - b^2 = 12$ și $a - b = 4$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos: <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <thead> <tr> <th>Cătălin</th> <th>Nicolae</th> <th>Anastasia</th> <th>Ana</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>48</td> <td>16</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> Dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de: a) Cătălin b) Nicolae c) Anastasia d) Ana <i>$a^2 - b^2 = 12 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 12$ $a-b = 4 \Rightarrow a+b = 12 : 4 = 3$</i>	Cătălin	Nicolae	Anastasia	Ana	48	16	4	3		
Cătălin	Nicolae	Anastasia	Ana								
48	16	4	3								
5p	6. Suma numerelor întregi din interval $[-2, 3]$ este egală cu: a) 0 b) 3 c) 5 d) 9 <i>$-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$</i>										

Alt:
 $a-b=4$
 $a+b=3$
 $2a=7$
 $a=\frac{7}{2}$
 $b=3-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$
 $a^2-b^2=\frac{49}{4}-\frac{1}{4}=\frac{48}{4}=12$

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

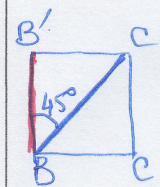
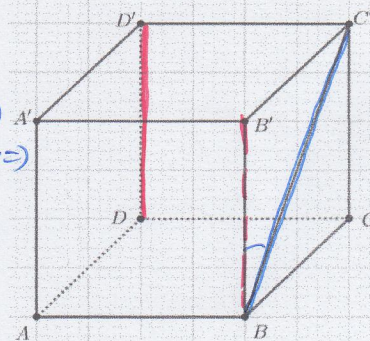
5p	1. În figura alăturată, punctele A, B, C și D, în această ordine, sunt coliniare. Dacă punctul B este mijlocul segmentului AC, punctul C este mijlocul segmentului AD și $BC = 3\text{ cm}$, atunci lungimea segmentului AD este egală cu: a) 15 cm b) 12 cm c) 6 cm d) 3 cm  $AD = AB + BC + CD = 3 + 3 + 6 = 12\text{ (cm)}$
5p	2. În figura alăturată, unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COA}$ sunt unghiuri în jurul punctului O, măsura unghiului AOB este de 120° și măsura unghiului BOC este de 130°. Măsura unghiului AOC este de: a) 140° b) 130° c) 120° d) 110°  $\widehat{AOC} = 360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{BOC}) = 360^\circ - (120^\circ + 130^\circ) = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$
5p	3. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, punctul M este mijlocul ipotenuzei BC, $AB = 4\text{ cm}$ și măsura unghiului ACB este de 30°. Lungimea segmentului AM este egală cu: a) 2 cm b) 4 cm c) 8 cm d) 12 cm  T_1 Cateta opusă 30° este $\frac{1}{2}$ din ipotenuză, deci $BC = 2AB = 2 \cdot 4 = 8\text{ (cm)}$ T_2 Mediana coresp. ipotenuzei este $\frac{1}{2}$ din ipotenuză, deci $AM = 4\text{ cm}$
5p	4. În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$, punctul O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD, iar $AO + DO = 8\text{ cm}$. Suma lungimilor segmentelor AC și BD este egală cu: a) 4 cm b) 8 cm c) 12 cm d) 16 cm  T_1 Diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc. ($AO = OC$; $DO = OB$) $AC + BD = 2AO + 2DO = 2(AO + DO) = 2 \cdot 8 = 16\text{ (cm)}$
5p	5. În figura alăturată, AB este diametru în cercul de centru O, $AB = 8\text{ cm}$. Lungimea cercului este egală cu: a) $64\pi\text{ cm}$ b) $16\pi\text{ cm}$ c) $8\pi\text{ cm}$ d) $4\pi\text{ cm}$  $S = D \cdot \pi = 8\pi\text{ (cm)}$ Sau $R = \frac{D}{2} = \frac{AB}{2} = 4\text{ (cm)}$ $S = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi\text{ (cm)}$ $D = 8 \Rightarrow R = \frac{D}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{ (cm)}$

5p

6. În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCD A' B' C' D'$. Măsura unghiului dintre dreptele BC' și DD' este de:

- a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°

$BC' \cap DD'$; necoplanare
 $DD' \parallel BB'$
 $\Rightarrow \widehat{(BC'; DD')} = \widehat{(BC'; BB')} =$
 $= \widehat{B'BC'} = 45^\circ$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p

1. Împărțind, pe rând, numărul natural n la 12 și la 18, se obțin resturile 7, respectiv 13.

(2p) a) Numărul natural n poate fi egal cu 103? Justifică răspunsul dat.

$$\begin{array}{r} 103 : 12 = 8 \text{ rest } 7 \\ \underline{96} \\ 7 \end{array} \quad \left. \begin{array}{r} 103 : 18 = 5 \text{ rest } 13 \\ \underline{90} \\ 13 \end{array} \right\} \Rightarrow n \text{ poate fi egal cu } 103.$$

(3p) b) Arată că cel mai mic număr natural n cu această proprietate este 31.

Observăm că restul împărțirii lui n la 12, respectiv la 18 este de fiecare dată cu 5 mai mic decât împărțitorul. Atunci $n+5$ se va împărți exact (va fi număr comun) al lui 12 și 18. C.m.m.m.c. al lor este 36.
Deci $n+5=36$ de unde $n=36-5=31$.
Deci numărul n căutat este 31.

$$\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ [12; 18] = 4 \cdot 9 = 36 \end{array}$$

5p

2. Se consideră expresia $E(x) = (3x+4)^2 - (2x+1)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(1) + E(-1) = 40$.

$$\begin{aligned} E(1) &= (3 \cdot 1 + 4)^2 - (2 \cdot 1 + 1)^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40 \\ E(-1) &= (3 \cdot (-1) + 4)^2 - (2 \cdot (-1) + 1)^2 = (-3 + 4)^2 - (-2 + 1)^2 = \\ &= 1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Avem $E(1) + E(-1) = 40 + 0 = 40$, g.e.d.

Obs: Puteam calcula $E(x) = 9x^2 + 24x + 16 - (4x^2 + 4x + 1) = 9x^2 + 24x + 16 - 4x^2 - 4x - 1 = 5x^2 + 20x + 15 = 5(x^2 + 4x + 3)$.
 $E(1) = 5(1^2 + 4 + 3) = 5 \cdot 8 = 40$; $E(-1) = 5((-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3) =$

$$= 5(1 - 4 + 3) = 5 \cdot 0 = 0 \text{ etc.}$$

(3p) b) Demonstrează că $E(n)$ este multiplu al lui 5, pentru orice număr natural n .

Am demonstrat la a) că $E(x) = 5(x^2 + 4x + 3)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

O altă modalitate de a calcula ar fi:

$$\begin{aligned} E(x) &= (3x+4)^2 - (2x+1)^2 = [(3x+4) - (2x+1)][(3x+4) + (2x+1)] = \\ &= (3x+4-2x-1)(3x+4+2x+1) = (x+3)(5x+5) = \\ &= 5(x+1)(x+3), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Atunci $E(n) = 5(n+1)(n+3)$, deci $E(n) : 5$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ g.e.d.

5p

3. Se consideră numerele reale $x = \left(\frac{8}{\sqrt{18}} + \frac{6}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{13}$ și $y = \left(\frac{5}{\sqrt{147}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{14}$.

(2p) a) Arată că $x = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{8}{3\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{13} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{13} + \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{13} = \\ &= \frac{8}{3 \cdot 13} + \frac{6}{13} = \frac{8 + 18}{3 \cdot 13} = \frac{26}{3 \cdot 13} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Deci $x = \frac{2}{3}$, g.e.d.

(3p) b) Arată că numărul $N = |y - x|$ este natural.

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{5}{7\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{14}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{5}{7\sqrt{3}} \cdot \frac{14}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{14}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{10}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$N = |y - x| = \left| -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = \frac{6}{3} = 2$$

$\Rightarrow N = 2$ este număr natural, g.e.d.

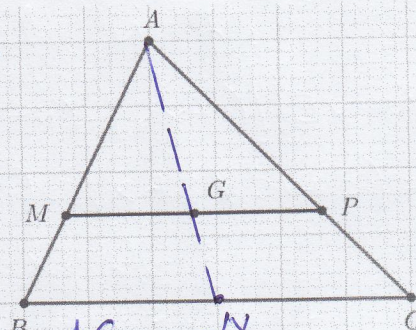
5p

4. În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC . Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC , $MP \parallel BC$, $G \in MP$, $M \in AB$ și $P \in AC$.

(2p) a) Arată că $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

G : centrul de greutate al $\triangle ABC \Rightarrow$
 $\Rightarrow AG$ este mediană (mediana din A trece prin G) și notăm cu N mijlocul lui $[BC]$, deci AN : mediană.

$\triangle AMG \sim \triangle ABN$ (T.f.N) $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3}$, g.e.d.



(3p) b) Dacă $AC = 12$ cm, atunci determină lungimea segmentului PC .

$\triangle AMP \sim \triangle ABC$ (T.f.N) $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{AP}{12} \Rightarrow AP = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8 \text{ (cm)}.$$

Deci $AP = 8$ cm.

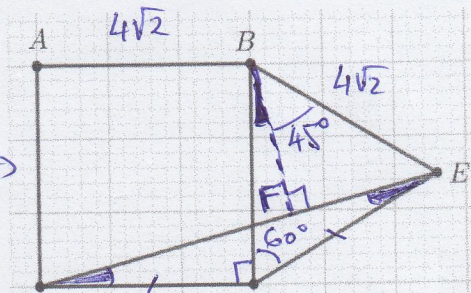
5p

5. În figura alăturată sunt reprezentate pătratul $ABCD$ cu $AB = 4\sqrt{2}$ cm și triunghiul echilateral BCE .

(2p) a) Arată că măsura unghiului CDE este egală cu 15° .

$ABCD$: pătrat } $\Rightarrow$
 $\triangle BCE$: echilateral }
 $\Rightarrow DC = CE \Rightarrow \triangle CDE$: isoscel $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ măsura lui $\widehat{CDE}$ este egală cu cea a lui $\widehat{CED}$,

$\widehat{CDE} = (\widehat{CED}) : 2 = [180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)] : 2 = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 30^\circ : 2 = 15^\circ$, g.e.d.



(3p) b) Demonstrează că distanța de la punctul B la dreapta DE este egală cu 4 cm.

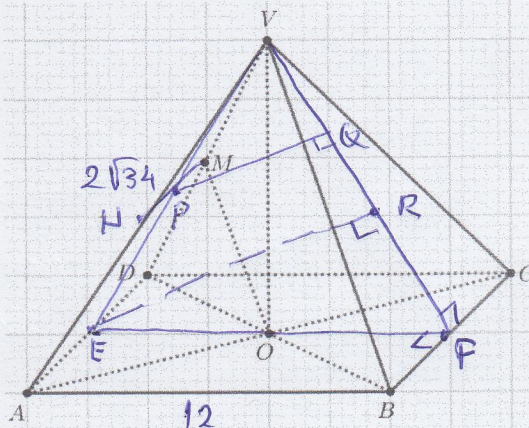
Distanța de la un punct la o dreaptă este egală cu lungimea perpendicului din punct pe dreaptă. Ducem $BF \perp DE$, deci $d(B; DE) = BF$.

Avem $BC \perp DC$ și $BF \perp DE \Rightarrow \widehat{CDE} \equiv \widehat{CBF}$ - unghiuri cu laturile perpendiculare. Atunci $\widehat{FBE} = \widehat{CBE} - \widehat{CBF} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. Dar $\triangle FBE$ e dreptunghic în F și atunci $\triangle FBE$ e dreptunghic isoscel.

$$BE = BF\sqrt{2}; BE = 4\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow BF\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow BF = 4 \text{ cm, g.e.d.}$$

5p

6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $AB = 12\text{ cm}$ și $VA = 2\sqrt{34}\text{ cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD iar punctul M este mijlocul muchiei VD .



(2p) a) Arată că dreapta OM este paralelă cu planul (VBC) .

$ABCD$: pătrat, diagonalele pătratului se înjumătățesc,
deci $OD = OB$
 $MV = MD$ (ipoteză) $\Rightarrow OM$ este linie mijlocie în $\triangle DVB$.
Atunci $OM \parallel VB$
 $VB \subset (VBC)$ $\Rightarrow OM \parallel (VBC)$ (o dreaptă este paralelă
cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă din plan.)

(3p) b) Determină distanța de la punctul M la planul (VBC) .

Fie N mijlocul lui $[VA]$. Atunci $[MN]$ este linie
mijlocie în $\triangle VAD$, deci $MN \parallel AD$
 $AD \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC$
 $BC \subset (VBC) \Rightarrow$
 $\Rightarrow MN \parallel (VBC)$ și atunci $d[M, (VBC)] = d[N, (VBC)]$
și, în general, egală cu distanța de la orice punct
al dreptei MN la planul (VBC) .

Vom sectiona piramida cu planul (VEF) , unde
 E este mijlocul lui $[AD]$, iar F este mijlocul
lui $[BC]$, adică VE și VF sunt apoteme ale
piramidei. Notăm $VE \cap MN = \{P\}$ și ducem $PQ \perp VF$,
 $Q \in VF$

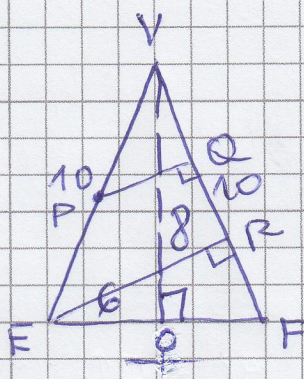
Avem $VF \perp BC$
 $EF \perp BC$ $\Rightarrow ER \perp (VBC)$
Ducem $ER \perp VF$ $\Rightarrow PQ \perp (VBC)$ (1)
 $ER \perp VF$
 $PQ \perp VF$
 ER, PQ : coplanare $\Rightarrow PQ \parallel ER$
 R : a.m.-a a $T_3 \perp$
 A : mijlocul lui $VE \Rightarrow PQ$: lin. mij.
în $\triangle VER$

deci $PQ = \frac{ER}{2}$.

În concluzie, $P \in [MN]$, $MN \parallel (VBC) \Rightarrow$

$\Rightarrow d[H, (VBC)] = d[P, (VBC)] = PQ$

$PQ \perp (VBC), (1)$



Cu T.P. în ΔVBC calculăm apotema:

$$VF^2 = VB^2 - BF^2 = (2\sqrt{34})^2 - BF^2 = 136 - 36 = 100 \Rightarrow VF = \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}$$

Cu T.P. în ΔVOF avem: $VO^2 = VF^2 - OF^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow VO = 8 \text{ (cm)}$.

$VO \cdot EF = VF \cdot ER \Leftrightarrow 8 \cdot 12 = 10 \cdot ER \Rightarrow ER = 9,6 \text{ (cm)}$

$PQ = \frac{1}{2} ER = 4,8 \text{ cm}$. Deci $d[H, (VBC)] = 4,8 \text{ cm}$.

METODA a_{II}-a:

Folosim faptul că volumul unui tetraedru nu depinde de alegerea bazei.

Avem: $V_{MVBC} = \frac{A_{\Delta VBC} \cdot d[H, (VBC)]}{3} \left(= \frac{A_b \cdot h}{3} \right)$

$A_{\Delta VBC} = \frac{BC \cdot VF}{2} = \frac{12 \cdot 10}{2} = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$

Deci $V_{MVBC} = 20 \cdot d[H, (VBC)]$. (2)

Pe de altă parte $V_{MVBC} = \frac{1}{2} V_{VB'CD} = V_{MB'CD}$ pentru că înălțimea tetraedrului $MB'CD$ este $\frac{1}{2} VO$, înălțimea lui $VB'CD$.

$V_{VB'CD} = \frac{A_{\Delta B'CD} \cdot VO}{3} = \frac{\frac{12 \cdot 12}{2} \cdot 8}{3} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 8}{3} = 2 \cdot 96 \text{ (cm}^3\text{)}$

